

LEÇON N° 208 : ESPACES VECTORIELS NORMÉS, APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES. EXEMPLES.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E , F et G trois \mathbb{K} -ev et (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

I/ Normes et applications linéaires continues sur un espace vectoriel.

A/ Norme. [G] [PGCD]

Définition 1 : Définition d'une norme et d'un evn

Exemple 2 : $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, \mathbb{R}^n et ses normes p et $(C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ sont des evns.

Proposition 3 : $L^p(\mu)$ est un evn pour $\|\cdot\|_p$.

Définition 4 : Définition de deux normes équivalentes.

Exemple 5 : Dans \mathbb{K}^n , $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$ car $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq n\|\cdot\|_\infty$ + équivalence des normes p , dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

B/ Applications linéaires continues. [G]

Théorème 6 : Différentes équivalences pour être linéaire continue.

Exemple 7 : La transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ est linéaire continue.

Remarque 8 : Pour montrer qu'une application linéaire est continue on utilise surtout critère lipschitzien.

Exemple 9 : La continuité dépend de la norme, considérer $\delta : f \mapsto f(0)$ avec $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.

Définition 10 : Ensemble des applications linéaires continues entre deux evns et norme subordonnée.

Proposition 11 : La norme subordonnée est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 12 : La continuité est préservée par équivalence des normes sur l'ensemble de départ.

Proposition 13 : Si $f \in E^*$, f continue si et seulement si $\text{Ker}(f)$ est fermé.

Remarque 14 : En particulier H est un hyperplan fermé si c'est le noyau d'une forme linéaire continue.

II/ Cas de la dimension finie.

A/ Équivalence des normes. [G] [PGCD]

Proposition 15 : $(E, \|\cdot\|_E)$ evn alors $\|\cdot\|_E$ est continue.

Développement 1.a)

Théorème 16 : Théorème d'équivalence des normes en dimension finie.

Remarque 17 : La réciproque est vraie.

Corollaire 18 : Toute application linéaire définie sur un evn de dimension finie est continue.

Contre-exemple 19 : Faux en dimension infinie avec $P \mapsto P'$ et la norme infinie sur $\mathbb{R}[X]$.

Corollaire 20 : Tout espace de dimension finie est complet.

Corollaire 21 : Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé.

Application 22 : L'exponentielle matricielle est un polynôme en la matrice : $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Corollaire 23 : Les parties compactes d'un evn sont les parties fermées et bornées.

Exemple 24 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Développement 1.b)

Théorème 25 : Théorème de Riesz.

Application 26 : Les compacts en dimension infinie sont d'intérieur vide.

B/ Normes sur les espaces de matrice. [PGCD] [ALL]

Définition 27 : Normes matricielles.

Proposition 28 : Les normées subordonnées $\|\cdot\|_{p,q}$ sont des normes matricielles.

Proposition 29 : Calcul de quelques normes subordonnées.

Application 30 : Les normes matricielles sont utiles en analyse numérique pour les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires (Gauss-Seidel et Jacobi).

III/ Cas de la dimension infinie.

A/ Les espaces de Banach. [G] [BREZ]

Définition 31 : Définition Banach.

Exemple 32 : Tout evn de dimension finie est de Banach, $(C^0([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est de Banach.

Proposition 33 : Si F de Banach alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de Banach.

Théorème 34 : Riesz-Fischer : $L^p(\mu)$ est complet.

Théorème 35 : E de Banach si et seulement si toute série absolument convergente converge.

Application 36 : Lemme de Von-Neumann et $GL(E)$ est ouverte.

Application 37 : L'exponentielle matricielle est bien définie.

Théorème 38 : Si E de Banach alors les applications linéaires continues bijectives sont des homéomorphismes.

Proposition 39 : Si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ et $(E,\|\cdot\|_1)$ est complet alors $(E,\|\cdot\|_2)$ est complet.

Application 40 : Théorème de Cauchy linéaire.

Théorème 41 : Extension par densité d'applications linéaires continues.

Application 42 : Extension de la transformée de Fourier de $S(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

B/ Espaces de Hilbert. [HL]

Définition 43 : Espaces de Hilbert : espaces préhilbertiens complet.

Exemple 44 : $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert et l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{C} 2π -périodiques aussi.

Remarque 45 : La norme dérive d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme.

Développement 2.a)

Théorème 46 : Théorème de projection sur un convexe fermé.

Corollaire 47 : Théorème de représentation de Riesz.

Application 48 : Existence des adjoints dans un Hilbert.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 47-57, p. 55
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 11, p. 16 et p. 24
- [ALL] Allaire Analyse numérique et optimisation p. 428
- [BREZ] Brézis Analyse fonctionnelle p. 57
- [HL] Hirsch-Lacombe Éléments d'analyse fonctionnelle p. 84-96