NOM : ROUHLING **Prénom :** Damien **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 918 : Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

Autre sujet : 914 : Décidabilité et indécidabilité : exemples

I Introduction : langage et axiomatique

1_ Langage

Déf 1 : Un langage du premier ordre est la donnée de symboles de constantes, de symboles de fonctions munis d'arités et de symboles de prédicats munis d'arités.

Ex 2 : langage de la théorie des groupes : constante e, fonctions $*$ (binaire), $^{-1}$ (unaire) et prédicat $=$ (binaire)

Rq 3 : Une constante est une fonction d'arité nulle

Déf 4 : On fixe un ensemble dénombrable de variable. L'ensemble des termes sur un langage est le plus petit ensemble contenant variables et constantes et stable par application des symboles de fonctions. Ou encore :
$t ::= x \mid c \mid f(t_1 \dots t_n)$

Ex 5 : $x * y^{-1}$ est un terme, pas $x * *$

Déf 6 : Les formules du premier ordre sur un langage sont données par :
$A, B ::= \bot \mid p(t_1 \dots t_n) \mid (A \vee B) \mid A \wedge B \mid A \to B \mid \neg A \mid \exists x A \mid \forall x A$

Ex 6 : $\forall x \,((x = e) \vee \exists y \,((\neg(y = e)) \wedge (y * x = e)))$

Déf 7 : On définit par induction la substitution d'une variable par un terme dans un terme $t[x := u]$ et dans une formule $A[x := t]$

2_ Systèmes de Hilbert

Déf 8 : Un système de Hilbert est la donnée d'un ensemble de formules appelées axiomes et d'un ensemble de règles ie de couples (ensemble de formules (hypothèses), formule conclusion))

Ex 9 : $H_1 : A \to B \to A$ $H_2 : (A \to B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)$
$H_3 : A \wedge B \to A$ $H_4 : A \wedge B \to B$ $H_5 : A \to B \to A \wedge B$
$H_6 : A \to A \vee B$ $H_7 : B \to A \vee B$
$H_8 : (A \to C) \to (B \to C) \to (A \vee B) \to C$ $H_9 : \neg A \leftrightarrow (A \to \bot)$
$H_{10} : \bot \to A$ $H_{11} : A \vee \neg A$
$H_{12} : A[x := t] \to \exists x A$ $H_{13} : \forall x A \to A[x := t]$

$\dfrac{A \quad A \to B}{B}\,(R_\to)$ $\dfrac{C \to A}{C \to \forall x A}$ x frais $(R_\forall)$

$\dfrac{A \to C}{\exists x A \to C}$ x frais $(R_\exists)$

Déf 10 : Soit Γ un ensemble de formules, fini. Une Γ-dérivation est une suite $A_1 \dots A_n$ de formules telles que pour $i \in [\![1, n]\!]$ A_i est un axiome ou $A_i \in \Gamma$ ou A_i est la conclusion d'une règle dont les prémisses sont dans $\{A_1 \dots A_{i-1}\}$
A est Γ-dérivable s'il existe une Γ-dérivation finissant par A

Ex 11 : Figure 1 : $\emptyset$-dérivation de $A \to A$

Thm 12 : Soit Γ, A et B.
B est Γ, A-dérivable ssi $A \to B$ est Γ-dérivable (on se place dans le système de Ex 9)

II Déduction naturelle

1. Le système

Déf 13: Un séquent est un couple $\Gamma \vdash A$ où Γ est un ensemble fini de formules (hypothèses) et A une formule (conclusion)

Déf 14: Un système de déduction naturelle est un ensemble de règles dont les hypothèses et la conclusion sont des séquents

Ex 15:

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,ax \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\,aff \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot_c \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg_e$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,\to_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,\to_e \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,\wedge_e^g \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,\wedge_e^d \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\vee_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee_i^g \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee_i^d \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\,\forall_i\ x \text{ frais} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,\neg_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x:=t]}\,\forall_e \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x:=t]}{\Gamma \vdash \exists x A}\,\exists_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\exists_e\ x \text{ frais}$$

Déf 16: Un séquent est dérivable si on peut l'obtenir par application d'un ensemble fini de règles

Ex 17: Figure 2 : dérivation de $\vdash \neg A \Leftrightarrow (A \to \bot)$

Développement 1
Thm 18: A est Γ-dérivable ssi $\Gamma \vdash A$ est dérivable

2. Propriétés

Déf 19: On définit les formules à trou en insérant un nouveau symbole $*$ dans la grammaire des formules
Si F est une formule à trou et A une formule $F\langle A\rangle$ est la formule obtenue en remplaçant $*$ par A dans F.

Thm 20: Soit Γ, A, B et F.
Si $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B$ est dérivable alors $\Gamma \vdash F\langle A\rangle \Leftrightarrow F\langle B\rangle$ aussi

Thm 21: Soit Γ, A, x et t.
Si $\Gamma \vdash A$ est dérivable alors $\Gamma[x:=t] \vdash A[x:=t]$ aussi

Rq 22: La démonstration de $\Gamma[x:=t] \vdash A[x:=t]$ aura la même structure que celle de $\Gamma \vdash A$

Déf 23: Une $\forall$-coupure est la succession des règles $\forall i$ et $\forall e$ dans une dérivation :

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\,\forall_i}{\Gamma \vdash A[x:=t]}\,\forall_e$$

Thm 24: Si $\Gamma \vdash A$ est dérivable alors $\Gamma \vdash A$ est dérivable sans $\forall$-coupure.

3. Sémantique

Déf 25: Un modèle M d'un langage est la donnée de :
- un ensemble non vide $|M|$ appelé domaine
- pour chaque constante c, $c_M \in |M|$
- pour chaque fonction n-aire f, $f_M : |M|^n \to |M|$
- pour chaque prédicat n-aire p, $p_M \in \mathcal{P}(|M|^n)$

Déf 26 : Soit $\mathcal{M}$ un modèle.
Un environnement e est une fonction de l'ensemble des variables dans $\mathcal{M}$.

Déf 27 : On définit par induction l'interprétation d'un terme ou d'une formule dans $\mathcal{M}, e$:

$[\![c]\!]_e^{\mathcal{M}} = c_{\mathcal{M}}$ $\quad [\![x]\!]_e^{\mathcal{M}} = e(x)$

$[\![f(t_1 \dots t_n)]\!]_e^{\mathcal{M}} = f_{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]_e^{\mathcal{M}} \dots [\![t_n]\!]_e^{\mathcal{M}})$

$[\![\bot]\!]_e^{\mathcal{M}} = 0$ $\quad [\![p(t_1 \dots t_n)]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $([\![t_1]\!]_e^{\mathcal{M}} \dots [\![t_n]\!]_e^{\mathcal{M}}) \in p_{\mathcal{M}}$

$[\![\neg A]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![A]\!]_e^{\mathcal{M}} = 0$

$[\![A \wedge B]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![A]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ et $[\![B]\!]_e^{\mathcal{M}}$

$[\![A \vee B]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![A]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ ou $[\![B]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$

$[\![A \to B]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![A]\!]_e^{\mathcal{M}} = 0$ ou $[\![B]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$

$[\![\forall x\, A]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour tout $a \in |\mathcal{M}|$, $[\![A]\!]^{\mathcal{M}}_{e[x:=a]} = 1$

$[\![\exists x\, A]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ ssi il existe $a \in |\mathcal{M}|$ tq $[\![A]\!]^{\mathcal{M}}_{e[x:=a]} = 1$

Si $[\![A]\!]_e^{\mathcal{M}} = 1$ on note $\mathcal{M}, e \vDash A$

Si pour tout e, $\mathcal{M}, e \vDash A$ on note $\mathcal{M} \vDash A$

Déf 28 : Une théorie T (ie un ensemble fini de formules)
est - contradictoire si elle n'admet aucun modèle
- consistante si $T \vdash \bot$ n'est pas dérivable

Développement 2
Thm 29 (correction) : si T est non contradictoire, alors T est consistante

Thm 30 (complétude, admis) : Si T est consistante, alors T est non contradictoire

III Calcul des séquents

Déf 31 : Un séquent généralisé est un séquent dans lequel le membre droit peut contenir plusieurs formules. On note $\Gamma \Vdash \Delta$

Déf 32 : Un système de calcul des séquents est un ensemble de règle dont les hypothèses et la conclusion sont des séquents généralisés. On généralise aussi la notion de dérivation

Ex 33 :

$$\frac{}{\bot \Vdash}\bot_g \qquad \frac{}{\Gamma, A \Vdash A, \Delta}ax \qquad \frac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma, A \Vdash \Delta}aff_g \qquad \frac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash A, \Delta}aff_d$$

$$\frac{\Gamma, A, A \Vdash \Delta}{\Gamma, A \Vdash \Delta}contr_g \qquad \frac{\Gamma \Vdash A, A, \Delta}{\Gamma \Vdash A, \Delta}contr_d \qquad \frac{\Gamma, A, B \Vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \Vdash \Delta}\wedge_g \qquad \frac{\Gamma \Vdash A, \Delta \quad \Gamma \Vdash B, \Delta}{\Gamma \Vdash A \wedge B, \Delta}\wedge_d$$

$$\frac{\Gamma, A \Vdash \Delta \quad \Gamma, B \Vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \Vdash \Delta}\vee_g \qquad \frac{\Gamma \Vdash A, B, \Delta}{\Gamma \Vdash A \vee B, \Delta}\vee_d \qquad \frac{\Gamma \Vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \Vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \Vdash \Delta}\to_g$$

$$\frac{\Gamma, A \Vdash B, \Delta}{\Gamma \Vdash A \to B, \Delta}\to_d \qquad \frac{\Gamma \Vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Vdash \Delta}\neg_g \qquad \frac{\Gamma, A \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash \neg A, \Delta}\neg_d \qquad \frac{\Gamma, A[x:=t] \Vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \Vdash \Delta}\forall_g$$

$$\frac{\Gamma \Vdash A, \Delta}{\Gamma \Vdash \forall x A, \Delta}x \text{ frais } \forall_d \qquad \frac{\Gamma, A \Vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \Vdash \Delta}x \text{ frais } \exists_g \qquad \frac{\Gamma \Vdash A[x:=t], \Delta}{\Gamma \Vdash \exists x A, \Delta}\exists_d$$

$$\frac{\Gamma \Vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \Vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Vdash \Delta, \Delta'}\text{coupure}$$

Ex 34 : Figure 3 : dérivation de $\Vdash (A \to B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)$

Thm 35 : - Si $\Gamma \vdash A$ est dérivable alors $\Gamma \Vdash A$ aussi
- Si $\Gamma \Vdash \Delta$ est dérivable alors $\Gamma, \neg\Delta \vdash \bot$ aussi

Thm 36 : On peut se passer de la règle de coupure

Figure 1:

$H_2 : (A \to (A \to A) \to A) \to (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$

$H_1 : A \to (A \to A) \to A$

$R_{\to} : A \to (A \to A) \to (A \to A)$

$H_1 : A \to A \to A$

$R_{\to} : A \to A$

Figure 2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg A, A \vdash \neg A}\,ax \quad \dfrac{}{\neg A, A \vdash A}\,ax}{\neg A, A \vdash \bot}\,\neg e}{\neg A \vdash A \to \bot}\,\to i}{\vdash \neg A \to (A \to \bot)}\,\to i \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \to \bot, A \vdash A \to \bot}\,ax \quad \dfrac{}{A \to \bot, A \vdash A}\,ax}{A \to \bot, A \vdash \bot}\,\to e}{A \to \bot \vdash \neg A}\,\neg i}{\vdash (A \to \bot) \to \neg A}\,\to i}{\vdash \neg A \leftrightarrow (A \to \bot)}\,\wedge i$$

Figure 3:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \to B, A \Vdash A, C}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{B \to C, A \Vdash A, C}\,ax \quad \dfrac{\dfrac{}{B, A \Vdash B, C}\,ax \quad \dfrac{}{C, B, A \Vdash C}\,ax}{B \to C, B, A \Vdash C}\,\to g}{B \to C, A \to B, A \Vdash C}\,\to g}{A \to B \to C, A \to B, A \Vdash C}\,\to g}{A \to B \to C, A \to B \Vdash A \to C}\,\to d}{A \to B \to C \Vdash (A \to B) \to (A \to C)}\,\to d}{\Vdash (A \to B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)}\,\to d$$