NOM : GROSPELLIER Prénom : Antoine Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 918 : Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

Autre sujet :

1

I Généralités ① Définitions

Def 1 : ☆ Un langage $\mathcal{L}$ est la donnée de :
- Un ensemble de symboles de fonctions munies de leurs arités (une constante est une fonction d'arité 0)
- Des symboles de relations munies de leurs arités dont $\bot^{(0)}$ (une variable propositionnelle est une relation d'arité 0).

☆ $\mathcal{V}$ est l'ensemble infini dénombrable des variables.

☆ L'ensemble des termes $\mathcal{T}$ est le plus petit ensemble contenant les variables et stable par application des symboles de fonctions.

☆ L'ensemble des formules atomiques noté Atom est composé des $R(t_1 \dots t_n)$ pour $R^{(n)}$ une relation et $t_1 \dots t_n$ des termes.

☆ L'ensemble des formules noté $\mathcal{F}$ contient Atom et est stable par application de $\vee^{(2)}, \wedge^{(2)}, \to^{(2)}, \neg^{(1)}, \exists x^{(1)}, \forall x^{(1)}$.

Def 2 : Un séquent est un couple (Γ, F) noté $\Gamma \vdash F$ où :
- Γ est un ensemble fini de formules (les hypothèses)
- F est une formule (la conclusion du séquent).

Def 3 : ☆ Une règle de démonstration est la donnée :
- D'un ensemble fini de séquents appelés les prémisses : $\Gamma_1 \vdash F_1 \dots \Gamma_n \vdash F_n$
- D'un séquent conclusion : $\Gamma_0 \vdash F_0$.

On la note $\dfrac{\Gamma_1 \vdash F_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash F_n}{\Gamma_0 \vdash F_0}$

☆ Le séquent $\Gamma \vdash F$ est prouvable pour un système de preuve (càd un ensemble de règles de démonstration) si on peut construire un arbre de racine le séquent et dont les noeuds sont des règles du système.

☆ F est prouvable si $\emptyset \vdash F$ est prouvable.

② Exemples concrets

Def 4 : Logique minimale : voir règles en annexe ①

On notera $\Gamma \vdash_m F$ si le séquent est prouvable en LM.

Ex 5 :
- $(C \to A) \vee (C \to B) \to (C \to A \vee B)$
- $(\forall x A \vee \forall x B) \to \forall x (A \vee B)$
- $\neg A \Leftrightarrow (A \to \bot)$

sont prouvables dans LM.

Def 6 : • Une règle démonstration $\dfrac{\Gamma_1 \vdash F_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash F_n}{\Gamma_0 \vdash F_0}$ est ~~admissible~~ dérivable si on peut construire un arbre dont $\Gamma_0 \vdash F_0$ est la racine, les $\Gamma_i \vdash F_i$ peuvent être des feuilles, les noeuds sont des règles du système de preuve.

• Une règle est admissible si étant donnés des arbres de dérivation de $\Gamma_i \vdash F_i$ $(i \geq 1)$, on peut construire un arbre de dérivation de $\Gamma_0 \vdash F_0$.

Rq 7 : Si une règle est dérivable, elle est admissible.

Ex 8 : • Si $\Gamma \vdash F$ est prouvable alors $\dfrac{}{\Gamma \vdash F}$ est dérivable.

• Dans LM, les règles ~~suivantes~~ suivantes sont dérivables :

$\dfrac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$ coupure $\quad \dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$ $\wedge g$ $\quad \dfrac{\Gamma, \forall x A, A[x := t] \vdash C}{\Gamma, \forall x A \vdash C}$ $\forall g$

Notation 9 : Soit L un système de preuve et r une règle,

On note $L + r$ le système de preuves $L \cup \{r\}$.
- $L_1 \lesssim L_2$ signifie que tout séquent prouvable avec L_1 l'est avec L_2
- $L_1 \approx L_2$ signifie $L_1 \lesssim L_2$ et $L_2 \lesssim L_1$.

②

Prop 10 : Soit L un système de preuves et r une règle admissible pour L alors $L \approx L + r$.

II Logique en déduction naturelle

① Définitions et propriétés

Def 11 : On définie :

- La logique minimale (de I) notée LM.
- La logique intuitionniste notée LI et définie par $LI : LM + \dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\bot_i$
- La logique classique notée LC et définie par $LC : LM + \dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\bot_c$
- On note $\Gamma \vdash_m F$, $\Gamma \vdash_i F$ ou $\Gamma \vdash_c F$ pour ces logiques.

Prop 12 : $\begin{cases} LM \subsetneq LI \\ LI \subsetneq LC \end{cases}$

Rq 13 : $LM \neq LI$ et $LI \neq LC$ (voir la prop 37).

Ex 14 : Dans LC, on a les lois de De Morgan qui sont dérivables :

$$\frac{\Gamma, (\neg A) \vee (\neg B) \vdash C}{\Gamma, \neg(A \wedge B) \vdash C}\wedge_m \qquad \frac{\Gamma, \exists x\, (\neg A) \vdash C}{\Gamma, \neg(\forall x A) \vdash C}\forall_m \quad \dots$$

Def 15 : On définit :

- La loi de Pierce : $\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash A}{\Gamma \vdash A}\,l_P$
- Le tiers exclu : $\dfrac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,t.e$
- La contraposition : $\dfrac{\Gamma \vdash (\neg B \to (\neg A)}{\Gamma \vdash A \to B}\,C.C$

Prop 16 : $LC \approx LI + l_P \simeq LI + t.e \simeq LM + c.c$.

② Rapport à la négation

Prop 17 :

$\vdash_m A \to \neg\neg A$	$\vdash_m \neg\neg(A \wedge B) \to (\neg\neg A \vee \neg\neg B)$	$\vdash_m \neg\neg A \wedge \neg\neg B \to \neg\neg(A \wedge B)$
$\vdash_c A \leftrightarrow \neg\neg A$	$\vdash_m \neg\neg(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$	$\vdash_i (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$
$\vdash_m \neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$	$\vdash_m \neg\neg \forall x A \to \forall x \neg\neg A$	$\vdash_c \forall x \neg\neg A \to \neg\neg \forall x A$.

Def 18 : Soit A une formule. La traduction de Gödel de A est notée A^g :

- $\bot^g = \bot$
- $A^g = \neg\neg A$ si $A \in Atom$
- $(\neg A)^g = \neg A^g$
- $(A \vee B)^g = \neg\neg(A^g \vee B^g)$
- $(A \wedge B)^g = A^g \wedge B^g$
- $(A \to B)^g = A^g \to B^g$
- $(\forall x A)^g = \forall x\, A^g$
- $(\exists x A)^g = \neg\neg \exists x\, A^g$.

Prop 19 :

- $\vdash_c A \leftrightarrow A^g$
- $\vdash_m \neg\neg A^g \to A^g$

Théo 20 : Pour tout séquent $\Gamma \vdash A$;

$\Gamma \vdash_c A$ ssi $\Gamma^g \vdash_m A^g$.

III Calcul des séquents

① Définitions

Def 21 : On modifie la définition d'un séquent pour autoriser plusieurs conclusions : Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est composé de Γ et Δ deux multiensembles de formules.

Rq 22 : Γ s'interprète comme la conjonction de ses formules et Δ comme la disjonction.

Def 23 :
- On définit le système LK (voir annexe ②).
- On définit le système LJ avec les mêmes règles sauf que le multiensemble

②

(3)

Δ contient 0 ou 1 élément pour assurer qu'il y ait 0 ou 1 élément à droite des séquents.
On remplace en plus $\vee_d$ par $\dfrac{\Pi \vdash A}{\Pi \vdash A \vee B}\vee_d^1$ et $\dfrac{\Pi \vdash B}{\Pi \vdash A\vee B}\vee_d^2$.

Ex 24 : • $\vdash_{LJ} (A \to B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)$
• $\vdash_{LJ} \neg(A\vee B) \to \neg A \wedge \neg B$
• $\vdash_{LK} \neg\neg A \to A$ et $\vdash_{LK} A \vee \neg A$
• $\vdash_{LK} \exists x \forall y\, (R(y) \to R(x))$

Rq : Les règles droites deviennent les règles d'introduction de la déduction naturelle.

Prop 25 : • On pourrait remplacer $\wedge_d$, $\vee_g$ et $\to_g$ par :
$\dfrac{\Pi \vdash A, \Delta \quad \Pi' \vdash B, \Delta'}{\Pi, \Pi' \vdash A\wedge B, \Delta, \Delta'}\wedge_d'$; $\dfrac{\Pi, A \vdash \Delta \quad \Pi', B \vdash \Delta'}{\Pi, \Pi', A\vee B \vdash \Delta, \Delta'}\vee_g'$ et $\dfrac{\Pi \vdash A, \Delta \quad \Pi', B \vdash \Delta'}{\Pi, \Pi', A \to B \vdash \Delta, \Delta'}\to_g'$

• On pourrait remplacer $\wedge_g$ et $\vee_d$ par :
$\dfrac{\Pi, A \vdash \Delta}{\Pi, A\wedge B \vdash \Delta}\wedge_g^1$; $\dfrac{\Pi, B \vdash \Delta}{\Pi, A \wedge B \vdash \Delta}\wedge_g^2$; $\dfrac{\Pi \vdash A, \Delta}{\Pi \vdash A \vee B, \Delta}\vee_d^1$ et $\dfrac{\Pi \vdash B, \Delta}{\Pi \vdash A\vee B, \Delta}\vee_d^2$

Prop 26 : Si $\Pi \vdash_{LJ} \Delta$ alors $\mathrm{card}(\Delta) \leq 1$.

Théo 27 : – Si $\Pi \vdash_C A$ alors $\Pi \vdash_{LK} A$
– Si $\Pi \vdash_I A$ alors $\Pi \vdash_{LJ} A$
– Si $\Pi \vdash_{LK} A_1, \dots, A_n$ alors $\Pi, \neg A_1, \dots, \neg A_n \vdash_C \bot$ (Donc $\Pi \vdash_C A_1 \vee \dots \vee A_n$)
Dev 1 → – [Si $\Pi \vdash_{LJ} \emptyset$ alors $\Pi \vdash_C \bot$] et [Si $\Pi \vdash_{LJ} A$ alors $\Pi \vdash_C A$].

(2) Elimination des coupures et conséquences

Def 28 : On définie une nouvelle règle mix : $\dfrac{\Pi \vdash \Delta \quad \Pi' \vdash \Delta'}{\Pi_A, \Pi' \vdash \Delta, \Delta'_A}\mathrm{mix}$

où Π_A et Δ'_A désignent Π et Δ' où on a supprimé des occurences de la formule A.

Prop 29 : $\begin{cases} LK \approx (LK \setminus \{\text{coupure}\}) + \text{mix} \\ LJ \approx (LJ \setminus \{\text{coupure}\}) + \text{mix} \end{cases}$

Def 30 : On suppose qu'on a un arbre de dérivation :
$\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\Pi \vdash \Delta} \quad \dfrac{\Pi_2}{\Pi' \vdash \Delta'}}{\Pi_A, \Pi' \vdash \Delta, \Delta'_A}\mathrm{mix}$. Le rang du mix est le couple (d,h) où :
{ d est son degré c'est à dire la taille de A
{ h est sa hauteur c'est à dire la somme des tailles de Π_1 et Π_2

Prop 31 : Si Π est un arbre de dérivation ne contenant qu'un mix en dernière règle alors la conclusion de Π est dérivable sans mix.
Démo : Par récurrence sur le rang du mix.

Théo 32 : $LK \approx LK \setminus \{\text{coupure}\}$ et $LJ \approx LJ \setminus \{\text{coupure}\}$.

Coro 33 : La règle de coupure est admissible dans $LK \setminus \{\text{coupure}\}$.

Coro 34 : • Les séquents $(\vdash_{LK})$ et $(\vdash_{LJ})$ ne sont pas dérivables
• Si $A \in$ Atom alors $(\vdash_{LK} A)$ n'est pas dérivable.
• Si $A \in \text{Atom} \setminus \{\bot\}$ alors $(A \vdash_{LK})$ et $(\vdash_{LK} \neg A)$ ne sont pas dérivables

Coro 35 : Théorème de la constructivité de la logique intuitionniste
• Si $(\vdash_{LJ} A_1 \vee A_2)$ alors $(\vdash_{LJ} A_1)$ ou $(\vdash_{LJ} A_2)$.
• Si $(\vdash_{LJ} \exists x A)$ alors il existe un terme t tel que $\vdash_{LJ} A[x := t]$.

Coro 36 : Si $A \in$ Atom alors $(\vdash_{LJ} A \vee (\neg A))$ n'est pas dérivable

Coro 37 : $LM \neq LI$ et $LI \neq LC$.

Dev 2

(3)

① Règles de la logique minimale :

Axiome : $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,ax$ Affaiblissement $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\,App$

	Règles d'introduction	Règles d'élimination
Implication	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,\to_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,\to_e$
Conjonction	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\wedge_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,\wedge_e^g$ $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,\wedge_e^d$
Disjonction	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee_i^g$ $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee_i^d$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\vee_e$
Négation	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,\neg_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\,\neg_e$
Quantificateur universel	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\,\forall_i$ Où x ne doit pas être libre dans Γ.	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\,\forall_e$
Quantificateur existentiel	$\dfrac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x A}\,\exists_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\exists_e$ Où x ne doit pas être libre dans Γ ou C

Ref : DNR.

② Règles de LK :

Règles axiomes : $\dfrac{}{\bot \vdash}\,\bot_g$ $\dfrac{}{A \vdash A}\,ax$

	Règles gauches	Règles droites
Affaiblissement	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,aff_g$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,App_d$
Contraction	$\dfrac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,Contr_g$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,Contr_d$.
Conjonction	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,\wedge_g$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,\wedge_d$
Disjonction	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\vee_g$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\vee_d$
Implication	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\,\to_g$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\,\to_d$
Négation	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\neg_g$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\neg_d$
Quantificateur universel	$\dfrac{\Gamma, A[x := t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A \vdash \Delta}\,\forall_g$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta}\,\forall_d$ où x n'est pas libre dans Γ et Δ
Quantificateur existentiel	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x A \vdash \Delta}\,\exists_g$ où x n'est pas libre dans Γ et Δ	$\dfrac{\Gamma \vdash A[x := t], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\,\exists_d$.

Règle de coupure : $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,coupure$