Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

En construisant un raisonnement autour du théorème du point fixe de Banach, on montre le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui garantit l'existence d'une solution répondant à une condition initiale et l'unicité d'une solution maximale.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lemme 1. Soit I un intervalle compact. L'espace $(\mathscr{C}(I, \mathbb{K}^d), \|.\|_\infty)$ est complet.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(\mathscr{C}(I, \mathbb{K}^d), \|.\|_\infty)$. Soit $x \in I$, on a

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty$$

donc $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est complet, la suite $(f_n(x))$ converge vers une limite notée $f(x)$. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : I \to \mathbb{K}$ nouvellement définie. Il reste à montrer que la fonction f est continue.

Notons déjà que (f_n) est de Cauchy, et est en particulier bornée :

$$\exists M \geq 0 \text{ tel que } \|f_n\|_\infty \leq M$$

donc en particulier, si $x \in I$, $|f_n(x)| \leq M$. Par passage à la limite, on obtient $|f(x)| \leq M$. Donc f est bornée et écrire $\|f\|_\infty$ a bien du sens.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\|_\infty < \epsilon$$

Donc,

$$\forall x \in I, \forall p, q \geq N, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty < \epsilon$$

En faisant tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \in I, \forall q \geq N, |f(x) - f_q(x)| < \epsilon$$

Nous venons d'écrire exactement la définition de la convergence uniforme ! Ainsi, (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f, donc f est continue. □

Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** Soient $A : I \to \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^d$ deux fonctions continues. Alors $\forall t_0 \in I$, le problème de Cauchy [DAN] p. 520

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (C)$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

Démonstration. Commençons par supposer l'intervalle I compact. On va montrer l'existence d'une solution globale. On écrit l'équation sous forme intégrale :

$$Y \in \mathscr{C}^1 \text{ vérifie } (C) \iff Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(u)Y(u) + B(u)\,\mathrm{d}u \qquad (*)$$

et on introduit la suite de fonctions (Y_n) définie par récurrence sur I par $Y_0 = y_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(u)Y_n(u) + B(u)\,\mathrm{d}u \qquad (**)$$

Notons $\alpha = \sup_{t\in I} \|A(t)\|$ et $\beta = \sup_{t\in I} \|B(t)\|$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in I$:

$$\|Y_n(t) - Y_{n-1}(t)\| \leq (\alpha\|y_0\| + \beta)\frac{\alpha^{n-1}|t-t_0|^n}{n!}$$

Le résultat est clairement vrai pour $n = 1$, supposons donc le vrai à rang $n \geq 1$. Pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
\|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} A(u) \times (Y_n(u) - Y_{n-1}(u))\,\mathrm{d}u\right\| \\
&\leq \alpha \int_{t_0}^{t} (\alpha\|y_0\| + \beta)\frac{\alpha^{n-1}|u-t_0|^n}{n!}\mathrm{d}u \\
&\leq (\alpha\|y_0\| + \beta)\frac{\alpha^n|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

et on procède de même pour $t \leq t_0$, ce qui achève la récurrence.

Soit L la longueur de I. On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|Y_n - Y_{n-1}\|_\infty \leq (\alpha\|y_0\| + \beta)\frac{\alpha^{n-1}}{n!}L^n$$

Il en résulte que la série de fonction $\sum(Y_n - Y_{n-1})$ est normalement convergente. Comme $(\mathscr{C}(I,\mathbb{K}^d), \|.\|_\infty)$ est complet, la série est uniformément convergente. On a donc l'existence d'une fonction $Y \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K}^d)$ telle que

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}(Y_n - Y_{n-1}) - Y\right\|_\infty = \|Y_n - (Y + Y_0)\|_\infty \longrightarrow 0$$

ie. (Y_n) converge vers $Y + Y_0 = Y + y_0 = Z$. Par convergence uniforme sur un intervalle compact, il est possible de passer à la limite dans $(**)$. D'où :

$$\forall t \in I, Z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(u)Z(u) + B(u)\,\mathrm{d}u$$

et comme Z est continue, elle est $\mathscr{C}^1$ et vérifie donc bien $(*)$.

On peut maintenant montrer l'unicité. Soient Y et Z deux solutions de (C) sur I. Par récurrence sur l'entier n, on montre comme ci-dessus que pour tout $t \in I$:

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leq \frac{\alpha^n|t-t_0|^n}{n!}\|Y - Z\|_\infty \longrightarrow 0$$

donc Y et Z coïncident bien sur I.

Supposons maintenant I quelconque. Il existe donc (K_n) une suite croissante d'intervalles compacts telle que $I = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$. En particulier, on définit bien l'application

$$\theta : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K}^d \\ t & \mapsto & Y_n(t) \end{array}$$

(où Y_n est la solution de (C) sur $K_n \ni t$). En particulier, θ est dérivable sur I tout entier, vérifie (C), et prolonge toute solution. □

La preuve, telle qu'elle est écrite ici, est en grande partie issue d'un livre d'Alain Pommellet. Elle est également disponible (sous une forme un peu différente) comme l'indique la référence, dans **[DAN]**. Selon la leçon, on pourra préférer le théorème suivant (dont la démonstration utilise des arguments semblables).

[GOU20] p. 374

Théorème 3 (Cauchy-Lipschitz local)**.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de E. Soit $F : I \times \Omega \rightarrow E$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (C)$$

admet une unique solution maximale.

Démonstration. Nous commençons par montrer l'existence en 4 étapes.

— Localisation : Fixons un réel $r > 0$ tel que le produit $P = [t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B}(y_0, r)$ soit contenu dans $I \times \Omega$. F est continue sur P qui est compact, donc est bornée par M sur P.

— Mise sous forme intégrale : Comme une solution de $y' = F(t,y)$ est de ce fait $\mathscr{C}^1$, on a

$$y \in \mathscr{C}^1 \text{ vérifie } (C) \iff y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, y(u))\, \mathrm{d}u \qquad (*)$$

— Choix d'un domaine stable : Soit $\alpha \in]0, r[$. Introduisons l'intervalle $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, l'espace $A_\alpha = \mathscr{C}(I_\alpha, \overline{B}(y_0, r))$, puis l'application

$$\Psi : \begin{array}{ll} A_\alpha & \rightarrow \mathscr{C}(I_\alpha, E) \\ \varphi & \mapsto \left(t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, \varphi(u))\, \mathrm{d}u\right) \end{array}$$

Le problème est ici de rendre A_α stable par Ψ. Pour tout $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned} & \|F(t, \varphi(t))\| \leq M \\ \implies & \|\Psi(\varphi)(t) - y_0\| \leq M|t - t_0| \leq \alpha M \end{aligned}$$

Par suite, en choisissant $\alpha M < r$, le domaine A_α est stable par Ψ.

— Détermination d'un domaine de contraction : Ici, A_α est normé par la norme $\|.\|_\infty$, et on veut faire de Ψ une contraction stricte. Soient $\varphi, \phi \in A_\alpha$, par définition, pour tout $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned}\|(\Psi(\varphi) - \Psi(\phi))(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (F(u,\varphi(u)) - F(u,\phi(u)))\,\mathrm{d}u \right\| \\ &\leq k|t - t_0|\,\|\varphi - \phi\|_\infty \\ &\leq k\alpha \|\varphi - \phi\|_\infty\end{aligned}$$

où k désigne le rapport de lipschitziannité de F. On choisit désormais α tel que $k\alpha < 1$ et $\alpha M < r$.

— Conclusion : L'application Ψ est, par choix de α, une contraction stricte de $(A_\alpha, \|.\|_\infty)$ dans lui-même. Le fermé $\overline{B}(y_0, r)$ de l'espace de Banach de E est complet, par suite $(A_\alpha, \|.\|_\infty)$ l'est aussi.

Par le théorème du point fixe de Banach, Ψ possède donc un point fixe φ dans A_α. φ est alors de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie (C) par $(*)$.

Il reste maintenant à montrer l'unicité. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (C). $\mathscr{S} \neq \emptyset$, donc peut définir J comme la réunion des intervalles de définition des solutions de (C).

Soient $\varphi, \phi \in \mathscr{S}$ (on note K et L leur intervalle de définition). Une récurrence sur n donne

$$\begin{aligned}\forall t \in K \cap L, \forall n \in \mathbb{N}, \|\varphi(t) - \phi(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|F(u,\varphi(u)) - F(u,\phi(u))\|\,\mathrm{d}u \right| \\ &\leq \frac{|t - t_0|^n}{n!} k^n \sup_{t \in K \cap L} |\varphi(t) - \phi(t)| \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

Donc φ et ϕ coïncident sur $K \cap L$.

Ainsi, on définit correctement l'application

$$\theta : \begin{array}{ccc} J & \rightarrow & E \\ t & \mapsto & \phi(t) \end{array}$$

(où $\phi \in S$ tel que t est dans son intervalle de définition). Si $t \in J$, il existe $\phi \in \mathscr{S}$ tel que t soit dans son intervalle de définition K. Comme ϕ et θ coïncident sur K, θ est dérivable sur K et

$$\forall t \in K, \theta'(t) = \phi'(t) = F(t, \phi(t)) = F(t, \theta(t))$$

Et comme $\theta(t_0) = y_0$, $\theta \in \mathscr{S}$ et prolonge toute solution. Donc θ est maximale et est bien unique. □

Bibliographie

Mathématiques pour l'agrégation **[DAN]**

Jean-François Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités.* De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.