Projection sur un convexe fermé

Chen Thomas
t.chen.thomas1[at]gmail.com

17 mai 2024

Attention

1. Ce document contient certainement des coquilles. N'hésitez pas à me le signaler. De même si vous avez une question.
2. Pour les recasages, ce sont les miens mais ce développement se case peut-être ailleurs et je n'y ai pas réfléchi.
3. Il se peut que ce développement dure plus de 15 minutes. J'ai essayé de le découper pour faire des recollements personnalisés.

Leçons

- 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.
- 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Références

[1] F. Hirsch, G. Lacombe. *Eléments d'analyse fonctionnelle.* Dunod, 2009.

Tout est dans [1].

Théorème 1. *Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x,C)$. Ce point est appelé projection de x sur C noté $p_C(x)$ et on a*

$$\forall x \in H, \forall y \in H, (y = p_C(x) \iff y \in C \text{ et } \forall z \in C, \Re(x-y, z-y) \leq 0)(\star).$$

Démonstration

Etape 1 : Existence du projeté. Soit $d := d(x,C)$. C'est un infimum donc il existe une suite minimisante $(y_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire $\|x-y_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d$. On peut la choisir telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x-y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

Montrons que $(y_n)_n$ est de Cauchy. Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Par l'identité du parallélogramme,

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_p\|^2)}_{\leq d^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)} = \underbrace{\left\|x - \frac{y_n+y_p}{2}\right\|^2}_{\geq d^2} + \left\|\frac{y_n-y_p}{2}\right\|^2.$$

Comme C est convexe, $\dfrac{y_p - y_n}{2} \in C$ donc

$$d^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) \geq d^2 + \left\|\frac{y_n - y_p}{2}\right\|^2.$$

Ainsi, $\|y_n - y_p\|^2 \leq 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)$ donc $(y_n)_n$ est de Cauchy dans H complet : elle converge donc mais puisque C est fermé, elle converge dans C : il existe $y \in C$ tel que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$.

On a $\|x - y\| \geq d$ car $y \in C$. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\|x - y\| \leq \|x - y_n\| + \|y_n - y\| \leq \sqrt{d^2 + \frac{1}{n}} + \varepsilon.$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$ puis $n \to +\infty$, on a $\|x - y\| \leq d$. Donc $\|x - y\| = d$.

Etape 2 : Unicité.

On vient de montrer que toute suite minimisante converge. Soit donc y_1, y_2 tels que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$. Soit (y_n) la suite valant y_1 sur les indices pairs, y_2 sinon. Alors la suite $(y_n)_n$ est minimisante donc convergente donc $y_1 = y_2$.

Etape 3 : Soit $y \in C$. Alors $y = p_C(x) \overset{*}{\iff} \forall z \in C, \Re(\langle x - y, z - y\rangle) \leq 0$. Soit $z \in C$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \\ \lambda & \mapsto & \|x - (1-\lambda)y - \lambda z\|^2 \end{array}.$$

Ne pas changer les rôles de y et z. Alors

$$\forall \lambda \in [0,1], \varphi(\lambda) = \|x - y + \lambda(y - z)\|^2 = \|x - y\|^2 + 2\lambda\Re(\langle x - y, y - z\rangle) + \lambda^2\|y - z\|^2.$$

Procédons par double implication.

$\Longrightarrow$ Si $y = p_C(x)$, alors $(1-\lambda)y + \lambda z \in C$ pour tout $\lambda \in [0,1]$. Ainsi,

$$\forall \lambda \in [0,1], \|x - (1-\lambda)y - \lambda z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

avec égalité si, et seulement si, $\lambda = 0$. Ainsi, φ est minimale en 0 donc $\varphi'(0) \geq 0$ [1]. Or,

$$\forall \lambda \in [0,1], \varphi'(\lambda) = 2\Re(\langle x - y, y - z\rangle) + 2\lambda\|y - z\|^2$$

donc $0 \leq \varphi'(0) = 2\Re(\langle x - y, y - z\rangle)$. En multipliant par -1, on a bien la condition voulue.

$\Longleftarrow$ On en déduit alors que

$$\forall \lambda \in [0,1], \varphi(\lambda) \geq \|x - y\|^2$$

donc pour $\lambda = 1$, on a donc $\|x - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$. Cela étant vrai pour tout $z \in C$, on a $y = p_C(x)$.

***Corollaire* 2.** Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $p_F : x \mapsto p_F(x)$ est linéaire et pour tout $x \in H$, $p_F(x) =: y$ est l'unique élément de E tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Démonstration. La condition $(\star)$ du théorème s'écrit :

$$y \in F \text{ et } \forall z \in F, \Re(\langle x - y, z - y\rangle) \leq 0.$$

Or si $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $z' \mapsto z := y + \overline{\lambda}z'$ est une bijection de F dans F. La condition $(\star)$ s'écrit donc

$$y \in F \text{ et } \forall z' \in F, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda\langle x - y, z'\rangle) \leq 0.$$

Cela est donc équivalent à demander $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Pour montrer la linéarité, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, x_1, x_2 \in H$. Notons $y_1 = p_F(x_1), y_2 = p_F(x_2)$. Alors $y_1, y_2 \in F$ donc $\alpha y_1 + \beta y_2 \in F$. Ensuite,

$$\forall z \in F, \langle \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2, z\rangle = \alpha\langle x_1 - y_1, z\rangle + \beta\langle x_2 - y_2, z\rangle = 0$$

donc $\alpha y_1 + \beta y_2$ vérifie la caractérisation du corollaire : cette quantité vaut donc $p_F(\alpha x_1 + \beta x_2)$: p_F est linéaire. □

1. non nécessairement nul car 0 n'est pas extremum local (comme par exemple identité sur $[0,1]$)

***Corollaire* 3.** Pour tout F sous-espace vectoriel fermé de H, on a $H = F \oplus F^\perp$.

Démonstration. Pour tout $x \in H$, on a $x = p_F(x) + x - p_F(x) \in F + F^\perp$. L'intersection est réduite à $\{0\}$ puisque si $x \in F \cap F^\perp$, alors $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$. $\square$