théorème. *$y'' - y = H$ admet une unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$*

Démonstration. — *unicité :*

Soit f solution de l'équation, alors en appliquant la transformée de fourier

$$-\xi^2\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(H)$$
$$\mathcal{F}(f) = -\frac{1}{1+\xi^2}\mathcal{F}(H)$$

Comme la transformée de fourier est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui même, f si elle existe est unique.

— *existence :*

on cherche d'abord une solution élémentaire : $y'' - y = \delta_0$ par analyse. Soit E une solution élémentaire. On a $\mathcal{F}(E) = -\frac{1}{1+\xi^2}\mathcal{F}(\delta_0) = -\frac{1}{1+\xi^2}$ donc

$$E(x) = \mathcal{F}^{-1}(-\frac{1}{1+\xi^2}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixy}}{1+y^2}dy$$

Calculons cette intégrale par le théorème des résidus.

Si $x \geq 0$, sur le demi cercle supérieur de rayon $R > 1$, $\varphi : z \to \frac{e^{ixz}}{1+z^2}$ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. On a $\varphi(z) = \frac{e^{ixy}}{2i}(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i})$

Par la formule des residus : $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \varphi(z)dz = Res(\varphi, i) = \frac{e^{-x}}{2i}$ et $\int_\gamma \varphi(z)dz = \int_{\gamma_1}\varphi(z)dz + \int_{\gamma_2}\varphi(z)dz$

$$\int_{\gamma_2}\varphi(z)dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{ixy}}{1+y^2}dy \to \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixy}}{1+y^2}dy$$

$$\begin{aligned}|\int_{\gamma_1}\varphi(z)dz| &= |\int_0^\pi \frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{1+R^2e^{2i\theta}}Rie^{i\theta}d\theta| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{e^{-xRsin(\theta)}}{|1+R^2e^{2i\theta}|}Rd\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}d\theta \to 0\end{aligned}$$

D'où $\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixy}}{1+y^2}dy = \pi e^{-x}$. En conjugant cette expression on a $\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-ixy}}{1+y^2}dy = \pi e^{-x}$ d'ou pour $x < 0$, $\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{ixy}}{1+y^2}dy = \pi e^{x}$

$E(x) = -\frac{1}{2}(e^{-x}\mathbb{I}_{x\geq 0} + e^x\mathbb{I}_{x<0})$

On trouve ensuite la solution de l'equation originale par convolution, soit $f = E * H$

$$\begin{aligned}f(x) = \int_{\mathbb{R}}E(y)H(x-y)dy &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(e^{-y}\mathbb{I}_{y\geq 0} + e^y\mathbb{I}_{y<0})\mathbb{I}_{x\geq y}dy \\ &= -\frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-y}\mathbb{I}_{x\geq y}dy + \int_{-\infty}^0 e^y\mathbb{I}_{x\geq y}dy\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\mathbb{I}_{x\geq 0}\left(\int_0^x e^{-y}dy + \int_{-\infty}^0 e^y dy\right) + \mathbb{I}_{x<0}\int_{-\infty}^x e^y dy\right] \\ &= -\frac{1}{2}((2-e^{-x})\mathbb{I}_{x\geq 0} + e^x\mathbb{I}_{x<0})\end{aligned}$$

f ainsi définie est continue et on verifie par le calcul qu'elle est bien solution de l'équation différentielle.