Intégrales de Fresnel

Achille Méthivier

Théorème 1. *Les intégrales* $\int \cos(2\pi u^2)\,\mathrm{d}u$ *et* $\int \sin(2\pi u^2)\,\mathrm{d}u$ *sont semi-convergentes sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi u^2)\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$

Démonstration du théorème. Justifions dans un premier la semi-convergence des intégrales. Soit $a < b \in R$, et remarquons que

$$\int_a^b \cos(2\pi u^2)\,\mathrm{d}u = -\int_{-a}^{-b} \cos(2\pi t^2)\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} \cos(2\pi t^2)\,\mathrm{d}t.$$

La convergence en $-\infty$ équivaut donc à la convergence en $+\infty$, et montrons cette dernière. Par le changement de variables, $u^2 = t$ on obtient

$$\int_a^b \cos(2\pi u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{\cos(2\pi t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

et comme il existe $c \in [a^2, b^2]$ avec $c > 0$, on a par intégration par parties

$$\int_a^b \cos(2\pi u^2)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{c} \frac{\cos(2\pi t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4\pi}\left(\Big[-t^{-1/2}\sin(2\pi t)\Big]_c^{b^2} + \underbrace{\int_c^{b^2} t^{-3/2}\sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t}_{\text{absolument convergent en } +\infty}\right)$$

Passons à la détermination des dites intégrales et introduisons pour cela les sommes de Gauss. Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit

$$G(m) = \sum_{n=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2i\pi n^2}{m}\right).$$

De plus, pour $x \in [0,1]$, on définit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2i\pi(n+x)^2}{m}\right).$$

La fonction f ainsi définie est C^1 sur $[0,1]$ et vérifie $f(0) = f(1) = G(m)$. On peut donc la prolonger en une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ (qu'on notera encore f) et C^1 par morceaux. On a alors convergence normale de sa série Fourier,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\,\mathrm{e}^{2i\pi kx}.$$

Par définition,

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi kx}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^1 \exp\left(2i\pi\left(\frac{(n+x)^2}{m} - kx\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^1 \exp\left(2i\pi\left(\frac{(n+x)^2 - mk(x+n) + mkn}{m}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^1 \exp\left(2i\pi\left(\frac{(n+x-mk/2)^2 + mkn - (mkn)^2/4}{m}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \mathrm{e}^{-i\pi k^2 m/2} \int_0^1 \exp\left(\frac{2i\pi(x+n-mk/2)^2}{m}\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En faisant les changements de variables $t = x + n - km/2$, on obtient

$$c_k(f) = \mathrm{e}^{-i\pi k^2 m/2} \sum_{n=0}^{m-1} \int_{n-km/2}^{n+1-km/2} \mathrm{e}^{2i\pi t^2/m}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-i\pi k^2 m/2} \int_{-km/2}^{m-km/2} \mathrm{e}^{2i\pi t^2/m}\,\mathrm{d}t.$$

Comme

$$\mathrm{e}^{-i\pi k^2 m/2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ pair} \\ i^{-m} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et la convergence absolue de la série de Fourier de f permet d'écrire

$$G(m) = f(0) = \sum_{k \text{ pair}} \int_{-km/2}^{m-km/2} \mathrm{e}^{2i\pi t^2/m}\,\mathrm{d}t + i^{-m} \sum_{k \text{ impair}} \int_{-km/2}^{m-km/2} \mathrm{e}^{2i\pi t^2/m}\,\mathrm{d}t.$$

Comme

$$\int_a^b \mathrm{e}^{2i\pi t^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \cos(2\pi t^2)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \sin(2\pi t^2)\,\mathrm{d}t,$$

on a $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2i\pi t^2}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ et donc

$$G(m) = \sqrt{m}(1 + i^{-m}) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2i\pi t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En particulier,

$$1 = G(1) = (1 + i^{-1}) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2i\pi t^2} \,\mathrm{d}t,$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2i\pi t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{1+i}{2}.$$

Finalement,

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi u^2) \,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi u^2) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$

□

I Références

1. Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, Mohammed El Amrani (page 221)