

# 182) Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies.

## I/ Géométrie euclidienne (RWM) affine

- Identification de  $\mathbb{C}$  à un plan euclidien orienté
- Norme  $\leftrightarrow$  module  $\rightarrow$  orthogonalité  
 Iso préservant les distances  $\rightarrow$  isométries  
 Translations, rotations en complexes; Réflexions  
 Générateurs de Isom( $\mathbb{C}$ ), classification dans le plan
- Angles  $\leftrightarrow$  argument  
 déf d'angle orienté de vecteurs / demi-droites  
 CNS pour que 3 pts soient alignés, pour que  $AB, AC$  soient  $\perp$   
 $\hookrightarrow$  CNS pour que 4 pts soient cocycliques ou alignés
- Similitudes  
 Conservation des angles <sup>non</sup> orientés, des rapports de distance  
 Ds le plan: action simpl transitive sur les couples de pts distincts  
 Caractérisation des similitudes  $\rightarrow f$  de rapport  $k \neq 1 \rightarrow O$  pt fixe  
 $z \mapsto a\bar{z} + b$  ( $a\bar{z} + b$ )  $\leftarrow \Rightarrow f = k \circ g \circ h$  hom,  $g$  rotation au pôle  $o$   
 Similitudes directes  $\leftrightarrow$  isos affines de la droite affine complexe

## II/ Sous-ensembles de $\mathbb{C}$

- Droites / cercles: équation dans  $\mathbb{C}$   
 $\rightarrow$  étudié en partie III.
- Coniques (Eiden)
- Triangle (Eiden)  
 $\rightarrow$  aire du triangle  
 $\rightarrow$  points remarquables et affines associés (lorsque le centre du cercle circonscrit est en  $o$ )  
 Cercle d'Euler, triangles remarquables  
 Théorème de Morley (évt: Napoléon, point de Torricelli: (Fou, Eiden) (RWM))
- Polygones réguliers (RWM)  
 groupe des isométries d'un polygone régulier  $\rightarrow$  grpe diédral

## III/ Géométrie projective

- Droite projective  $P^1(\mathbb{C}) \simeq \hat{\mathbb{C}}$  (RWM, Remis L2/)
- Homographies: action simpl transitive sur les triplets de pts distincts
- Invariant: birapport de 4 points  
 $\rightarrow$  préservé par les homographies
- Cercles / droites: déf du groupe circulaire engendré par les homographies et  $z \mapsto \bar{z}$   
 birapport réel ssi les 4 pts sont cocycliques ou alignés  
 Théorème des 6 birapports  
 Quadrilatère inscriptible et inégalité de Ptolemée.

## IV/ Nombres constructibles

- Déf (Carrega)
- Thm de Wantzel
- Thm de Gauss