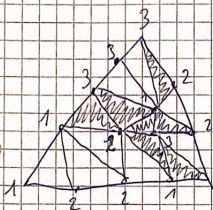


Preuve Pt fixe Brouwer par Sperner

Point fixe de Brouwer: Toute fonction continue $f: B^n \rightarrow B^n$ admet un point fixe.

En dimension 1: Corollaire facile du TV.

Preuve en dimension 2: Par le lemme de Sperner.



Soit un "grand" triangle de sommets V_1, V_2, V_3 triangulé. Supposons que les sommets de la triangulation sont coloriés en 1, 2, ou 3 ainsi:

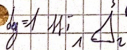
$$V_1 \rightarrow 1, V_2 \rightarrow 2, V_3 \rightarrow 3$$

$$\forall i \in [V_i, V_j], i \rightarrow i \text{ ou } i \rightarrow j$$

Alors il existe un "petit" triangle dont les sommets sont coloriés en 1, 2, 3.

Preuve: On considère le sous-graphe du graphe dual comportant tous les sommets mais dont les seuls arêtes sont celles traversant une arête de sommets coloriés en 1 et 2.

Le degré de chacun des sommets à l'intérieur du triangle est de degré 0, 1 ou 2 en fonction de la coloration des sommets du petit triangle associé:



De plus, le degré du point situé à l'extérieur est impair (on le montre par récurrence sur le nombre de sommets entre V_1 et V_2).

Or, dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair!

$$\text{car } \sum_{i \in S} d(v_i) = 2|A|$$

Donc il existe un sommet dans le graphe dual de degré 1. $\square$

