

126 : Exemples d'équations en arithmétique.

Cadre : $n \in \mathbb{N}^*$.

I) Équation diophantiennes linéaires

A) À deux variables

Équation $ax = b$, théorème de BACHET-BEZOUT, algorithme d'EUCLIDE, exemple. Équation de la forme $ax + ny = c$, théorème de résolution. Exemples.

B) Généralisation à n variables

Résolution de $AX = B$ dans le cas où A est diagonale. Forme normale de SMITH Application à la résolution générale de $AX = B$.

II) Système de congruences

Théorème chinois, exemple et contre-exemple. Application à la résolution d'un système, exemple. Généralisation au cas où il n'y a plus de coprimauté. DEV 1 : SYSTÈME DE CONGRUENCES.

III) Application des nombres premiers

A) Réduction modulo un nombre premier

Critère d'EISENSTEIN, (soluce modulo p) \Rightarrow (soluce sur Z). Exemple. Caractérisation des carrés de F_p , exemple.

B) Vers la loi de réciprocité quadratique

Symbole de LEGENDRE, exemple. DEV 2 : LOI DE RÉCIPROCITÉ QUADRATIQUE. Cas où p est pair. Exemples.

IV) Équations diophantiennes non linéaires

A) Exemples de résolution

Théorème de SOPHIE GERMAIN. Théorème de FERMAT.

B) L'anneau des entiers de GAUSS

L'anneau $Z[i]$, propriétés, l'ensemble Σ . Inversibles de $Z[i]$. Théorème des deux carrés de FERMAT. Application.

Références :

- GOURDON
- ROMBALDI
- BECK-MALICK-PEYRÉ
- PERRIN
- CALDERO