

122 : Anneaux principaux. Exemples et applications.

Cadre : $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif unitaire, \mathbb{K} un corps.

I) Principalité

Définition d'un idéal, exemples. Intersection d'idéaux. Morphisme d'anneaux et idéaux. Définition de A/I et ses idéaux. Idéal maximal et premier, caractérisation. Idéal principal, anneau principal, Théorème chinois et applications.

II) Divisibilité

A) Inversibilité

Élément inversible, lien avec les idéaux, cas d'un corps.

B) Divisibilité

Définition, irréductibilité, exemples, éléments premiers entre eux, équivalence dans un anneau principal.

C) Anneaux factoriels

Éléments associés, exemples. Anneau factoriel, principal \Rightarrow factoriel. Lemmes d'EUCLIDE et de GAUSS.

D) Anneaux à PGCD

PGCD, exemple, anneau à PGCD, PPCM

III) Exemples d'anneaux principaux

A) Anneaux euclidiens

Définition, exemples. Euclidien \Rightarrow principal. Théorème de BEZOUT.

B) L'anneau $\mathbb{Z}[i]$

Définition, propriétés, théorème de FERMAT.

IV) Applications

A) Algèbre linéaire

Polynôme minimal, lemme des noyaux, caractérisation des endomorphismes diagonalisable, trigonalisables. Endomorphisme semi-simple, exemple. **DEV 1** : CARACTÉRISATION DES ENDOMORPHISMES SEMI-SIMPLES. Dunford adapté.

B) Facteurs invariants d'une matrice

Matrices équivalentes. **DEV 2** : FORME NORMALE DE SMITH. Cas d'un corps, exemples.

ANNEXE : Algorithme d'EUCLIDE, algorithme de la forme normale de SMITH.

Références :

- ROMBALDI
- PERRIN
- BECK-MALICK-PEYRÉ