

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

I) Générateurs d'un groupe

A) Sous-groupes engendrés

G un groupe, $X \subset G$ une partie.

Intersection de sous-groupes, définition d'un groupe engendré par une X , exemple. Définition de "type fini". Cas d'une partie dont les éléments commutent 2 à 2, contre-exemple avec D_n . Groupe dérivé, caractérisation d'un groupe abélien, passage au quotient, exemple de \mathbb{H} .

B) Ordre d'un élément

Définition, ordre de l'inverse, ordre de g^k sachant $o(g)$, application à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

II) Les groupes abéliens

A) Groupes monogènes

Définitions : monogène et cyclique, monogène \Rightarrow abélien. Contre-exemple (groupe de KLEIN). Caractérisation des groupes monogènes. Groupe des unités Cas des groupes d'ordre premier, d'ordre pq . Fonction d'EULER, automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sous-groupe fini d'un corps commutatif.

B) Groupes abéliens finis

Théorème chinois, théorème de KRONECKER, exemple et application à $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$.

III) Application à la simplicité des groupes

Définition d'un groupe simple.

A) Groupes symétrique et alterné

Parties génératrices de \mathfrak{S}_n , exemples. Signature, groupe alterné \mathfrak{A}_n . DEV 1 : SIMPLICITÉ DE \mathfrak{A}_n , POUR $n \geq 5$. Le cas \mathfrak{A}_4 , sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_n .

B) Groupes matriciels

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien sur un corps K .

Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$, identification aux groupes de matrices. Réflexion, transvection, exemple. Parties génératrices de $GL(E)$ et $SL(E)$. Retournement, exemple, partie génératrice de $O(n)$. DEV 2 : $SO_n(\mathbb{R})$ ENGENDRÉ PAR LES RETOURNEMENTS + $SO_3(\mathbb{R})$ EST SIMPLE.

IV) Groupes de morphismes

Ordre d'un élément par un morphisme, isomorphisme. Ensemble $Hom(G, G')$, applications aux groupes cycliques, à \mathfrak{S}_n , à V_4 .

Références :

- ROMBALDI
- PERRIN
- CALDERO - TOME 2