

126 Exemples d'équations diophantiennes.

Généralités et

I / Equations diophantiennes de degré 1 (I-R) [Ireland-Rosen, Cohen vol 1. Nathanson]

- Equations diophantiennes : def
 - solutions dans $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$
 - Equations à une variable $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$.
 - $\mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$: on augmente le nombre de variables.
- Eq. diophantienne de degré 1
 - Thm de Bézout, algo d'Euclide étendu
 - Equation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$: existence ssi $\text{pgcd}(a_i) \mid b$.
- Ensemble de solution
 - dans \mathbb{Z} : expression pour \mathbb{Z} via form. \mathbb{Z} via (Cohen)
 - dans \mathbb{N} : def (fait dans Gourdin) \rightsquigarrow existence de sol dans \mathbb{N} (Nathanson)

II / Utilisation de la congruence (I-R)

- Equation $ax = b \pmod{m}$
 - Système $x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \dots, x \equiv b_r \pmod{m_r}$: thm des restes chinois
- Lien avec les Equations diophantiennes
 - $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ sol de $\mathbb{Z} \rightarrow$ sol modulo $n \forall n$.
 - ↳ exemples dans I-R.
 - ↳ Récip. : si sol dans $\mathbb{Z} \forall n$, alors sol dans \mathbb{Z}
 - idée : $\mathbb{F}_p^n \rightarrow \mathbb{F}_p$ forme lin.
 - ($x_1, \dots, x_n \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$)
- Réciprocité quadratique et appl

III / Equations diophantiennes de degrés supérieurs

- Somme de deux, quatre carrés
 - Somme de deux carrés (Perrin)
 - n somme de deux carrés si $n = \prod p_i^{v_i}$ avec $v_i \equiv 0 \pmod{4}$ pour $p_i \equiv 3 \pmod{4}$
 - Somme de quatre carrés (Thm de Lagrange)
 - (I-R)
 - Évoque problème de Waring et thm de Weyl.
- Triplets pythagoriciens, Théorème de Fermat, Sophie Germain
 - (I-R)
 - donner les solutions de $x^2 + y^2 = z^2$.
 - $x^4 + y^4 = z^4$ n'a pas de solution non triviale.
 - _____ z^4 _____
 - thm de Fermat
- Equation de Pell-Fermat (I-R)