101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Cadre : E un ensemble non vide et $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E.

I) Généralités

A) Définitions, exemples

Définition. Caractérisation par le morphisme $\Phi : G \to \mathfrak{S}(E)$. Exemples classiques d'actions. Définitions d'orbites, d'actions transitive et fidèle. Théorème de CAYLEY.

B) Dénombrer à l'aide des orbites

Définition de stabilisateur. Théorème de bijection. Équation aux classes. **DEV** 1 : CARDINAL DE $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$. Cas des classes de conjugaison. Définition de fixateur. Formule de BURNSIDE.

II) Actions sur les groupes finis

G groupe fini d'ordre n.

A) Résultats classiques

Théorème de LAGRANGE. Application aux groupes d'ordre premier. Exemple de $\mathbb{H}$.

B) Les p-groupes

Définition, E^G. Centre d'un p-groupe. Exemple. Applications aux groupes d'ordre p^2. Exemple. Théorème de CAUCHY. p-sous-groupe de SYLOW. Théorème de SYLOW. Applications.

C) Les groupes $\mathfrak{S}_n$ et $Aut(\mathfrak{S}_n)$

Action sur $\mathfrak{S}_n$, définition d'un r-cycle. Conjugaisons des cycles dans $\mathfrak{S}_n$ et des 3-cycles dans $\mathfrak{A}_n$. Sous-groupe d'indice n dans $\mathfrak{S}_n$. Définitions des groupes $Aut(\mathfrak{S}_n)$ et $Int(\mathfrak{S}_n)$. **DEV** 1 : AUTOMORPHISMES DE $\mathfrak{S}_n$. Cas où $n = 6$.

III) Applications en algèbre linéaire

A) Actions sur des ensembles matriciels

Actions de STEINITZ. Définition de classe d'équivalence. Théorème du rang. Caractérisation des matrices diagonalisables.

B) Actions sur un espace vectoriel

Représentation linéaire. Exemples de représentation (triviale, régulière, groupe diédral). Représentation par permutation. Dénombrement des points fixes d'une permutation.

Références :

- ROMBALDI
- PERRIN
- CALDERO