

I/ Anneaux principaux. Généralités (Gablot)

- Définition: idéal principal, anneau principal
- Premiers ex d'anneaux principaux: anneaux euclidiens  
 déf: euclidien  $\rightarrow$  principal  
 ex:  $\mathbb{Z}$ ,  $K[x]$  où  $K$  corps;  $K[x]$  principal  $\Leftrightarrow K$  corps (Perrin)  
 ces:  $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$  principal non euclidien (Perrin)
- PGCD, PPCM  
 déf, prop qui suit, ex dans  $K[x]$  ...  
 elts premiers entre eux, thm de BÉZOUT  
 cas euclidien: algo d'Euclide permet le calcul du PGCD  
 Théorème chinois
- Irréductibles et premiers
  - irréductible  $\Leftrightarrow$  premier.
  - $a$  premier ssi  $(a)$  idéal premier ssi  $A/(a)$  intègre
  - $a$  irréductible ssi  $(a)$  idéal maximal ssi  $A/(a)$  corps
- Principal  $\Leftrightarrow$  factoriel  
 déf d'un anneau factoriel, d'un anneau noethérien  
 Principal  $\Rightarrow$  noethérien puis factoriel (Perrin)  
 Irréductibles de  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{C}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$  voire  $\mathbb{K}[[x]]$ .

Trouve le bon endroit à insérer  
 (x/y)  
 principal

II/ Un exemple d'anneau euclidien:  $\mathbb{Z}[i]$

- $\mathbb{Z}[i]$  euclidien
- Théorème des deux carrés

III/ Modules sur un anneau principal

- Sous-modules d'un module libre  $\rightarrow$  pourquoi  $A$  principal nécessaire?  
 rang  $\nabla$ :  $\Delta \rightarrow CA$  strictement mais de même rang.
- Théorème de la base adaptée  
 Cas euclidien:  $S_L(K)$  engendrée par les matrices diagonales et les transvections  
 Cas principal:  $\rightarrow$  transvections généralisées  $\rightarrow$  en rang  
 écriture en terme de bases  
 en terme de matrices.  
 + unicité  
 appl: classification des groupes abéliens fins.  
 (décomposition de Jordan)

à revoir dans course D Serre

IV/ Applications

- Éléments algébriques sur un corps (Perrin)  
 déf + propriétés équivalentes + exemples  
 $\hookrightarrow$  polynôme minimal  
 ensemble des elts algébriques est un corps.
- Algèbre linéaire
  - Lemme des noyaux (Gomden) + appl: critère de diagonalisation  
 $\hookrightarrow$  polynôme minimal d'un end.
  - Invariants de similitude  
 + appl: une matrice est semblable à sa transposée.