229

Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

DC IR.

I/ Les fonctions monotones.

1) Définitions et premières propriétés.

Définition 1 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. f est dite croissante (resp. décroissante) lorsque :
$\forall (x,y) \in D^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $\forall (x,y) \in D^2$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$) et on dit que f est monotone si f est croissante ou décroissante.

Exemple 2 : $x \mapsto x^3$ est monotone sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3 : Une application monotone f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Corollaire 4 : Dans ce cas, f est bijective de D dans $f(D)$.

Proposition 5 : L'ensemble des fonctions croissantes de D dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{M}_+(D)$ (resp $\mathcal{M}_-(D)$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 6 : i) Si $(f,g) \in \mathcal{M}_+(D)^2$ sont positives, alors $fg \in \mathcal{M}_+(D)$
ii) Si $(f,g) \in \mathcal{M}_+(D)$ ou $(f,g) \in \mathcal{M}_-(D)$, alors $f \circ g \in \mathcal{M}_+(D)$ et si $(f,g) \in \mathcal{M}_+(D) \times \mathcal{M}_-(D)$ alors $f \circ g \in \mathcal{M}_-(D)$

Théorème 7 : (Limite monotone) Soit $f : D \to \mathbb{R}$ monotone, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $a \in \overline{D}$. Alors f admet une limite finie ou infinie en a.

2) Régularité des fonctions monotones

Théorème 8 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone. f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Corollaire 9 : (Fonctions Réciproques) Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. Alors $f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J.

Exemple 10 : L'application $x \mapsto e^x$ induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$

Théorème 11 : Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, et f un homéomorphisme de I sur J. Alors f est strictement monotone

Exemple 12 : La fonction $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante.

Proposition 13 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.
f est croissante (décroissante) si et seulement si : $\forall t \in \mathring{I}$ $f'(t) \geq 0$ $(\forall t \in \mathring{I})$ $f'(t) \leq 0$.

3) Théorème de Dini

Définition 14 : On dit que $f_n : D \to \mathbb{R}$ converge simplement vers $f : D \to \mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in D$ $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Définition 15 : On dit que $f_n : D \to \mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : D \to \mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Remarque 16 : La convergence uniforme induit la convergence simple mais la réciproque est fausse.

Contre-exemple 17 : La suite $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ converge simplement vers 0 mais pas uniformément.

Théorème 18 : (Dini) 1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers f continue sur $[a,b]$ alors, (f_n) converge uniformément vers f.
2) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes et continues sur $[a,b]$. Si (f_n) converge simplement vers f continue sur $[a,b]$, alors (f_n) converge uniformément vers f.

II / Les fonctions convexes

I = intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Définitions et premières propriétés

Définition 19 : Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si : $\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f[(1-\lambda)a + \lambda b] \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.

Proposition 20 : La fonction f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

Exemple 21 : Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \|x\|_2^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Proposition 22 : Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall x_0 \in I$, $g_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante.

Application 23 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et si $(a,b,c) \in I$, $a<b<c$

Alors $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

2) Régularité des fonctions convexes

Proposition 24 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Il y a équivalence entre : i) f est convexe ii) f' est croissante iii) La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes.

Corollaire 25 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est 2 fois dérivables, f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

Exemple 26 : Si f est une fonction convexe et continue sur $[0,1]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ est convexe sur $[0,1]$

Théorème 27 : (Inégalité des accroissements finis) Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $(a,b) \in U^2$ tel que $[a,b] = \{ta + (1-t)b, t \in [0,1]\}$ soit inclus dans U. Si f est continue sur $[a,b]$, différentiable en tout point de $]a,b[$ et si $\exists M > 0$, $\|d_c f\| \leq M \quad \forall c \in]a,b[$, alors $\|f(a) - f(b)\| \leq M \|b-a\|$

Théorème 28 : Soit U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable sur U, alors il y a équivalence entre :

i) f est convexe

ii) $\forall (x,y) \in U^2$, $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$

iii) $\forall (x,y) \in U^2$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0$

iv) Si f est 2 fois différentiable sur U, $\forall x \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n$, $\langle Hess_x(f) h, h \rangle \geq 0$

Application 29 : Soit $A \in S_n$ alors $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe si et seulement si A est positive.

Proposition 30 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable et convexe, α est un minimum global de $f \iff \nabla f(\alpha) = 0$.

III / Applications

1) Inégalités de convexité.

Proposition 31 : (arithmético-géométrique) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. On a $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Proposition 32 : Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 1$, on a $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$

Proposition 33 : (Holder) Soit $(p,q) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Alors $\forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $\forall (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}_+^n$ $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{\frac{1}{q}}$

Proposition 34 : (Minkowsky) Soit $p \geq 1$ et $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}_+^{2n}$
Alors $\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Application 35 : $\forall p \geq 1$, $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme.

2) Optimisation

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

Définition 36 : On appelle fonctionnelle quadratique sur $\mathbb{R}^n$ toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle - \langle b,x\rangle \text{ où } b \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 37 : (gradient à pas optimal)
1) L'application φ atteint son minimum en $\bar{x}$ (solution de $Ax=b$) et seulement en ce point.
2) Soit $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{x}\}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^n$ définie par :
$$\begin{cases} x_0 = a \\ \alpha_k = \dfrac{\|\nabla\phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\phi(x_k)\|_A^2} \text{ si } x_k \neq \bar{x}, \ 0 \text{ sinon} \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\phi(x_k) \end{cases}$$
La suite (x_k) converge vers $\bar{x}$ et $\forall k \geq 0$
$$\|x_{k+1}-\bar{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \left(\frac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{\lambda_{max}+\lambda_{min}}\right)^{k+1} \|x_0-\bar{x}\|$$

D1

Lemme 38 : (Inégalité de Kantorovitch) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a
$$4\frac{\lambda_{max}\lambda_{min}}{(\lambda_{max}+\lambda_{min})^2} \leq \frac{\|x\|^4}{\|x\|_{A^{-1}}^2 \|x\|_A^2}$$

Théorème 39 : (Méthode de Newton) Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ $\forall x \in [c,d]$.
On considère la suite $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
1) f possède un unique zéro a et $\forall x \in [c,d]$, $\exists z \in [a,x]$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$
2) $\exists C > 0$, $|F(x)-a| \leq C|x-a|^2$ $\forall x \in [c,d]$ et $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I$, la suite (x_n) a une convergence d'ordre 2 vers a dans I.
3) Si $f''(x) > 0$ $\forall x \in [c,d]$, alors $[c,d]$ est stable par F et (x_n) est strictement décroissante (ou constante) et on a $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n-a)^2$ et $x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x-a)^2$ $(x_0 > a)$

D2