148 Exemples de Décomposition de Matrices Applications.

$n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

I/ Constructions effectives.

1) Factorisation LU

Théorème 1 : Il existe au moins une matrice inversible M telle que la matrice MA soit triangulaire supérieure.

Exemple 2 : Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, en posant $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{20} & \frac{9}{20} & 1 \end{pmatrix}$

$$MA = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Théorème 3 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors A possède une unique décomposition $A = LU$ avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure si et seulement toutes les sous matrices $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,k} \\ \vdots & & \\ a_{k,1} & - & a_{k,k} \end{pmatrix}$ sont inversibles.

Remarque 4 : Les coefficients de U et L sont donnés par

$\Big\{ m_{i,j} =$

- - -

Remarque 5 : On peut écrire U sous la forme DR où D est diagonale et R triangulaire supérieure à diag 1. Si la décomposition LDR existe, elle est unique.

Corollaire 6 : Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et Δ_k sont inversibles, Alors A admet une décomposition LDL^T où L triangle inf à diag 1 et D est diagonale. Cette décomposition est unique.

Remarque 7 : Soit p le nombre de termes > 0 de D. Alors $\operatorname{sign}(A) = \operatorname{sign}(D) = (p, n-p)$.

Corollaire 8 : A admet une factorisation LDL^T où les coefficient diagonaux strictement positifs $\Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Une telle factorisation est unique.

Remarque 9 : On calcule L et D par $d_1 = a_{1,1}$ et
$$\begin{cases} l_{i,j} = \dfrac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} d_k l_{j,k}}{d_j} \\ d_i = a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2 d_k \end{cases}$$

2) Décomposition de Cholesky

Théorème 10 : $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists B$ triangulaire inf inversible telle que $A = BB^T$.

De plus, une telle décomposition est unique si l'on impose la positivité des coefficients diagonaux de B.

Remarque 11 : On calcule B par $b_{i,j} = \dfrac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{i,k} b_{j,k}}{b_{j,j}}$

$b_{i,i}^2 = a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k}^2$.

Application 12 : Si $A = BB^T$, alors $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} b_{i,i}^2$

3) Décomposition QR :

Théorème 13 : (Gram-Schmidt) Pour toute famille libre $\{x_1, \dots, x_p\}$ dans E, il existe une unique famille orthonormée $\{e_1, \dots, e_p\} \subset E$ telle que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ et $\langle x_k | e_k \rangle > 0$.

Définition 14 : A est dite orthogonale si $AA^T = I_n$ et on note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I_n\}$

Théorème 15 : $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = QR$ où $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et R est triangulaire sup à coeff diag > 0. Unicité de la décomp

II / Construction Algorithmiques

1) Décomposition de Dunford :

Théorème 16 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si Π_A est scindé alors $\exists ! (D, N)$ où D diagonalisable et N nilpotente telle que $A = D + N$ et $DN = ND$

Proposition 17 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. On pose $P = \dfrac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}$ et on considère la suite de matrices (A_n) donnée par $A_0 = A$ et $A_{n+1} = A_n - P(A_n) P'(A_n)^{-1}$
Alors $A_n \to D$ et $A_m = D$ $\forall m \geq \log_2(n)$.

2) Décomposition polaire

Définition 19 : On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{PP^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P \in GL_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) = \{PP^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$.

Théorème 20 :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}$$
et
$$\begin{array}{ccc} U_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ (U, H) & \longmapsto & UH \end{array}$$
sont des homéomorphismes.

Exemple 21 : Pour $n = 1$ $\mathcal{H}_1^{++} = \mathbb{R}_+^*$ et $U_1(\mathbb{C}) = \{O \in \mathbb{C} \mid |O| = 1\}$ d'où l'unicité de la décomposition $z = \rho e^{i\theta}$.

Proposition 22 : La suite $(M_k) \in GL_n(\mathbb{R})$ donnée par $\begin{cases} M_0 = M \\ M_{k+1} = \frac{1}{2} M_k (I_n + M_k^T M_k)^{-1} \end{cases}$ converge vers O où $M = OS$ est la décomposition polaire de M.
La suite $(M^T M_k)$ converge vers S.

III / Applications

1) Résolution de systèmes linéaires

Méthode 23 : Afin de résoudre un système linéaire $Ax = b$ où $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on peut utiliser la méthode de Gauss et :
i) déterminer M tq MA soit triangulaire supérieure
ii) calculer Mb.
iii) Résoudre $MAu = Mb$.

Remarque 24 : La méthode de Gauss nécessite $O\left(\frac{2n^3}{3}\right)$ opérations.

Méthode 25 : La méthode LU revient à résoudre successivement les 2 systèmes triangulaires $Ly = b$ et $Ux = y$.

Remarque 26 : La méthode LU nécessite $O\left(\frac{n^3}{3}\right)$ opérations.

Méthode 27 : Dans le cas de la décomposition de Cholesky, on utilise la même méthode que LU

Remarque 28 : Cholesky demande $O(\frac{n^3}{6})$ opérations.

2) Recherches de valeurs propres

Théorème 29 : Cvg de la méthode QR

3) Exponentielle matrice.

Méthode 30 : $X' = AX$ fait apparaître Dunford.

Théorème 31 : Si $A = D + N$ alors $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$.

Quarteroni

Filbet.