Leçon 148 : Exemples de décomposition de matrices. Applications.

Dans cette leçon $\mathbb{K}$ désignera un corps ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).

I Décomposition PLU

I.1 Cas général

Théorème 1. *[Cia, p.83]* ***(Factorisation LU)*** *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que les n sous-matrices $A_{[1,k],[1,k]}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ soient inversibles. Alors, il existe une matrice triangulaire inférieure L (ayant des coefficients diagonaux égaux à 1) et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$. De plus, une telle factorisation est unique.*

Remarque 2. Le théorème précédent est en fait une équivalence.

Théorème 3. *[Cal, p.260]* ***(Factorisation PLU)****. Soit A une matrice inversible. Il existe une matrice de permutations P telle que $P^{-1}A$ admette une décomposition LU.*

Application 4. [Cia, p.84] **(Résolution de système linéaire)** Un intérêt majeur de l'existence d'une factorisation LU est le suivant : si l'on a à résoudre plusieurs systèmes linéaires correspondant à la même matrice A, il suffit de conserver l'expression des deux matrices L et U calculées lors de la résolution du premier système linéaire. On résoute ensuite chaque système linéaire $Av = b$ en résolvant deux systèmes linéaires à matrices triangulaires supérieures: $Lw = b$ puis $Uu = w$.

Exemple 5. [Cia, p.77, 83] **(Exemple d'une décomposition LU)**

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{20} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

I.2 Cas particulier d'une matrice symétrique définie positive

Définition 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des **matrices symétriques définies positives** de taille $n \times n$ est :

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{S \in GL_n(\mathbb{R}), {}^tS = S;\ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, {}^txSx > 0\}.$$

Théorème 7. *[Cia, p.87]* ***(Factorisation de Cholesky)*** *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe (au moins) une matrice réelle triangulaire inférieure B telle que $A = BB^T$. De plus, on peut imposer que les éléments diagonaux de B soient tous > 0, et la factorisation correspondante est alors unique.*

Remarque 8. [Cal, p.88] Le théorème précédent est en fait une équivalence : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une matrice réelle triangulaire inférieure B telle que $A = BB^T$.

Remarque 9. Le calcul du déterminant est immédiat grâce à la décomposition de Cholesky:

$$\det(A) = (b_1 ... b_n)^2$$

II Réduction des endomorphismes

II.1 Généralités

Définition 10. [Gou, p.163] On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

Définition 11. [Gou, p.163] On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Application 12. La trigonalisation et la diagonalisation des matrices permettent de faciliter le calcul du déterminant d'une matrice (qui est alors le produit des éléments diagonaux).

Proposition 13. *[Gou, p.163]* ***(Condition suffisante de diagonalisation)*** *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si le polynôme caractérisitque de A est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples, alors A est diagonalisable.*

Application 14. [Gou, p.146, p.180] **(Diagonalisation d'un déterminant circulant)** On considère la matrice circulante :

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

Alors A est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(P(1), P(\omega), ..., P(\omega^{n-1})$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

Théorème 15. *[Gou, p.164]* ***(Condition nécessaire et suffisante de trigonalisation)*** *$A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Corollaire 16. *Toute matrice est trigonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*

Remarque 17. [Gou, p.165] La trigonalisation d'une matrice est parfois un passage commode pour montrer un résultat. Notons la relation entre le produit de deux matrices triangulaires supérieures:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & a_{22}b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}c_{nn} \end{bmatrix}$$

Théorème 18. *[Gou, p.167] (**Diagonalisation simultanée**) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisables (resp. trigonalisables) telles que $AB = BA$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales (resp. triangulaires supérieures).*

Remarque 19. [Gou, p.166] La réciproque est vraie puisque deux matrices diagonales commutent.

II.2 Lemme des noyaux

Proposition 20. *[Gou, p.175] (**Décomposition des noyaux**) Soit $M \in M_n(K)$ et $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$, les polynômes P_i étant premier entre eux deux à deux. Alors,* $\ker P(A) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(A)$.

Théorème 21. *[Gou, p.176] (**Théorème de Cayley-Hamilton**) Soit $A \in M_n(K)$ et $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique. On a $\chi_A(A) = 0$.*

Corollaire 22. *[Cal, p.160] Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{n_i}$ le polynôme caractéristique de A ($\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$). Alors E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques $E^{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I_n)^{n_i}$*

Corollaire 23. *[Gou, p.175] Soit $M \in M_n(K)$. M est diagonalisable si et seulement si il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples sur K tel que $P(M) = 0$.*

II.3 Décomposition de Dunford

Dans la proposition suivante f désigne un endomorphisme et non une matrice, mais cela revient au même une fois une base fixée.

Proposition 24. ***[DEV.]*** *[Gou, p.194] Soit $f \in \mathcal{E}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. On note $P = \beta M_1^{\alpha_1} ... M_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en facteurs irréductibles. Pour tout i ($1 \leqslant i \leqslant s$), on note $N_i = \ker M_i^{\alpha_i}(f)$. On a alors:*

- *$E = N_1 \oplus ... \oplus N_s$;*
- *Pour tout i ($1 \leqslant i \leqslant s$), la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.*

Théorème 25. ***[SUITE DEV.]*** *[Gou, p.195] (**Décomposition de Dunford additive**) Soit $A \in M_n(K)$. Si son polynôme caractéristique P_A (ou son polynôme minimal π_A) est scindé, alors il existe un unique matrice N nilpotente et une unique matrice D diagonalisable telles que*

$$A = D + N \text{ et } DN = ND.$$

Proposition 26. *[Cal, p.164] Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on a de plus:*

- *D et N sont des polynômes en A;*
- *A et D ont le même polynôme caractérisitique.*

Remarque 27. Comme l'ensemble des matrices diagonaisables sur $\mathbb{K}$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$, si l'on prend une matrice A au hasard dans $M_n(\mathbb{K})$, il est très probable que sa décomposition de Dunford soit la décomposition triviale $A = A + 0_{M_n(\mathbb{K})}$.

Exemple 28. [Cal, p.165] **(Exemple de Décompositions de Dunford)** On a aussi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 29. [Cal, p.165] L'hypothèse $DN = ND$ est primordiale pour assurer l'unicité car

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[Cal, p.355] Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit :

$$\exp : \begin{array}{ccc} M_n(K) & \to & M_n(K) \\ A & \mapsto & \exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array}$$

Proposition 30. *[Cal, p.355] On a les propriétés suivantes sur l'exponentielle matricielle:*

1. $\forall A \in M_n(K), \exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$;
2. Si $AB = BA$, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$

Application 31. [Cal, p.381] Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a l'équivalence:

$$A \text{ diagonalisable} \Longleftrightarrow \exp(A) \text{ diagonalisable.}$$

Théorème 32. *[Cal, p.162]* ***(Décomposition de Dunford multiplicative)*** *Soit $A \in GL_n(K)$, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors A se décompose de façon unique $A = DU$ où D est diagonalisable, et U unipotente ($U - I_n$ nilpotente).*

Remarque 33. [Cal, p.356] L'exponentielle permet de transformer la décomposition de Dunford additive $A = D + N$ dans $M_n(K)$ en la **décomposition de Dunford multiplicative** de $\exp(A)$ dans $GL_n(K)$, $\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$. De plus, le calcul de $\exp(A)$ est ainsi simplifié car $\exp(N)$ est un polynôme en N et D est diagonalisable.

Théorème 34. *[Cal, p.166]* ***Une méthode de Newton pour la décomposition de Dunford additive*** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où la caractéristique de $\mathbb{K}$ est nulle) de polynôme caractéristique χ_A et de décomposition de Dunford $D+N$. On pose $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi'_A}$. Alors la suite (A_r) définie par*

$$A_0 = A \; A_{r+1} = A_r - P(A_r)P'(A_r)^-1$$

est stationnaire de limite D.

Remarque 35. [Cal, p.168] Cette méthode se programme rapidement sans avoir à factoriser χ_A (et donc sans avoir à calculer les racines du polynômes caractérisitque de A. Le pgcd entre χ_A et χ'_A s'effectue à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

III Décomposition polaire

III.1 Résultats de décomposition

Lemme 36. *[Cal, p.348,p.351] On a les deux résultats*

1. *$S_n^{++}(\mathbb{R})$ peut être munie d'une application racine carrée.*
2. *$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{P^tP \in M_n(\mathbb{R}),\ P \in GL_n(\mathbb{R})\}$.*

Lemme 37. *L'ensemble des matrices orthogonales*

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^tMM = I_n\}$$

est compact.

Théorème 38. ***[DEV.]*** *[Cal, p.348]* ***(Décomposition polaire)*** *La multiplication polaire induit un homéomorphisme :*

$$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times Sn^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} GL_n(\mathbb{R}),\ (O,S) \mapsto OS.$$

Remarque 39. On a un résultat similaire avec les matrices complexes en remplaçant $S_n^{++}(\mathbb{R})$ avec les matrices hermitiennes $H_n^{++}(\mathbb{C})$ et $O_n(\mathbb{R})$ par les matrices unitaires $U_n(\mathbb{C})$.

Proposition 40. *$GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.*

Corollaire 41. *Toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ se décompose comme un produit d'une matrice de $O_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ où*

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \{S \in GL_n(\mathbb{R}), {}^tS = S;\ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, {}^txSx \geqslant 0\}.$$

III.2 Applications de la décomposition polaire

Proposition 42. *[Cal, p.351] Pour toute matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$, on a :*

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)},$$

où ρ est le rayon spectral donné par :

$$\rho(M) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|\lambda_i|,\ \lambda_i \in Spec(M)\}.$$

Remarque 43. [Cal, p.351] Grâce à la continuité du rayon spectral et à la densité des matrices inversibles complexes, l'égalité précédente est encore valable pour toute matrice A.

Proposition 44. *[Cal, p.372] Le groupe $GLn^+(\mathbb{R})$ des matrices inversibles à déterminant positif est connexe.*

References

[Cal] Philippe Caldero, Jérôme Germoni *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries* Calvage et Mounet, 2017 (deuxième tirage).

[Cia] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique et matricielle et à l'optimisation*

[Gou] Xavier Gourdon, *Les maths en tête, algèbre*