241

Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

I – Modes de convergence des suites et séries de fonctions

A – Définitions et critères de CAUCHY

Dans ce paragraphe et le suivant, (X,d) désigne un espace métrique, $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $\|\cdot\|_\infty : f \in \mathcal{F}(X,E) \longmapsto \sup_{x\in X} \|f(x)\| \in \overline{\mathbb{R}^+}$, et on se donne $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X,E)$ et $f \in \mathcal{F}(X,E)$.

[EA] 139 <u>Def 1</u> : On dit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur X) si pour tout $x \in X$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ dans E, i.e. si $\forall x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

[EA] 140 <u>Def 2</u> : On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur X) si $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

[EA] 140 <u>Ex 3</u> : Soit $a \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement et uniformément vers la fonction nulle.

<u>Rq 4</u> : La série de fonctions de terme général f_n n'est autre que la suite de ses sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. On parlera donc de convergence simple ou uniforme d'une série de fonctions.

[EA] 193 <u>Rq 5</u> : $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément si, et seulement si $\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

[EA] 192 <u>Def 6</u> : On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge absolument (sur X) si pour tout $x\in X$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\|$ converge.

<u>Ex 7</u> : La série de fonctions de terme général $f_n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}{}^n$ converge absolument sur la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$.

[EA] 193 <u>Def 8</u> : On dit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement (sur X) si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ converge.

<u>Ex 9</u> : La série de fonctions de terme général $f_n : x \longmapsto \frac{x}{n^2}$ converge normalement sur toute partie bornée de E.

<u>Abréviations</u> : CVS : "converge simplement" / CVU : "converge uniformément" CVA : "converge absolument" / CVN : "converge normalement"

<u>Thm 10</u> (Critères de CAUCHY) : Supposons $(E,\|\cdot\|)$ complet.

- $\forall x\in X, \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} : \forall p\geq N, \forall q\geq N, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS. [EA] 142
- $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} : \forall p\geq N, \forall q\geq N, \forall x\in X, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU

B – Séries entières

<u>Def 11</u> : Une série entière (de la variable complexe) est une série de fonctions de terme général $f_n : z \longmapsto a_n z^n$ $\left((a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\right)$. On note abusivement $\sum a_n z^n$ cette série de fonctions. [EA] 229

<u>Def 12</u> : On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ le rayon du plus grand disque ouvert sur lequel cette série converge absolument, appelé disque de convergence de $\sum a_n z^n$. [EA] 229

<u>Thm 13</u> : Une série entière converge normalement sur tout compact contenu dans son disque de convergence.

C – Liens entre les différents modes de convergence

<u>Prop 14</u> : Les différents modes de convergence s'impliquent selon le diagramme : [EA] 140, 192, 193, 194

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CVN} \arrow[r, Rightarrow, "\text{si } E \text{ complet}"] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{CVU} \arrow[d, Rightarrow] \\ \mathrm{CVA} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{CVS} \end{tikzcd}$$

et ces implications sont strictes.

<u>Cex 15</u> : La suite des $f_n : x \longmapsto x^n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0,1[$ vers la fonction nulle. [EA] 141

<u>Cex 16</u> : [EA] 203

- Pour $f_n : x \longmapsto \frac{x^2}{1+(nx)^2}$, $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément ;
- Pour $f_n : x\in[0,1] \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $\sum_{n\geq 1} f_n$ CVU mais pas normalement. [EA] 194

<u>Cex 17</u> : La série entière de terme général $f_n : z \longmapsto (-1)^n \frac{z^n}{n}$ converge simplement

mais pas absolument sur le disque unité fermé de $\mathbb{C}$.

[H] ~254 **Cex 18**: La série entière de terme général $f_n : z \longmapsto z^n$ converge absolument mais pas normalement sur le disque unité de $\mathbb{C}$.

Cex 19: La série de fonctions de terme général $f_n : x \longmapsto \frac{x^n}{n!}$ converge normalement dans l'espace $P([0,1])$ des fonctions polynomiales sur $[0,1]$, mais pas uniformément. Cela montre que $(P([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

Rq 20: Une quelconque convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'entraine pas automatiquement une quelconque convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

Cex 21: Considérons $f_n : x \longmapsto n^{-x}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$, mais $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas uniformément vers 0.

D - Modes de convergence probabilistes

Dans ce paragraphe, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur Ω à valeurs dans un espace euclidien E. On se donne également $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire.

[CR] 49 **Def 22**: On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque-sûrement (pour $\mathbb{P}$) vers X si

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\}) = 1$$

On note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$.

[CR] 49 **Def 23**: On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilités vers X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

[CR] 49 **Def 24**: On dit que $(X_n)_n$ converge dans L^p ($p\in[1,+\infty[$) vers X si $\mathbb{E}[\|X_n - X\|^p] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^p} X$.

[CR] 58 **Def 25**: Supposons que $E = \mathbb{R}$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si en tout point t de continuité de $t \longmapsto \mathbb{P}(X\leq t)$, on a $\mathbb{P}(X_n \leq t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X\leq t)$.
On note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$.

Prop 26: Les modes de convergence ci-dessus s'impliquent selon le diagramme : [CR] 50 60

$L^q_{(q\geq p)} \Rightarrow L^p \Rightarrow \mathbb{P} \Rightarrow \mathcal{L}$, $\quad$ p.s. $\Rightarrow \mathbb{P}$, et ces implications sont strictes.

Cex 27: Supposons que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2) = p_n$ [H] ~364 ?

- Si $p_n = \frac{1}{n}$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{p.s.} 0$.
- Si $p_n = \frac{1}{n^2}$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ mais $X_n \not\xrightarrow{L^1} 0$.

Cex 28: $X_n \sim \mathcal{B}(p)$: $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{B}(p)$, mais $(X_n)_n$ ne converge pas en probas. [H] 362

II - Théorèmes de transfert et d'interversion

Dans cette section, (E, d_E) et (F, d_F) sont des espaces métriques. On se donne $(f_n)_n \in \mathcal{F}(E,F)^{\mathbb{N}}$, et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

Thm 29: Si $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est continue, et si $(f_n)_n$ CVU vers f, alors f est continue. [EA] 145

Thm 30: Si $E = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, si F est complet, si $(f_n)_n$ CVU vers f, alors [EA] 151

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

Cor 31: Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n \in C^1([a,b], F)$, si F est complet, $(f_n)_n$ CVS vers f et si $(f_n')_n$ CVU vers $g \in \mathcal{F}([a,b], F)$, alors f est C^1 et $f' = g$. [EA] 148

Thm 32 (de la double limite) : Supposons que F est complet et que $(f_n)_n$ CVU vers f. Soit $a \in \bar{D}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x)$ existe. Alors $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x)$ existe, et : [EA] 146

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x)$$

Cor 33: Si $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est différentiable sur un ouvert Ω de E, si $(f_n)_n$ CVS sur Ω vers f, et si $(df_n)_n$ CVU sur Ω, alors f est différentiable sur Ω, $(f_n)_n$ CVU vers f sur Ω, et $df = d(\lim_{n\to+\infty} f_n) = \lim_{n\to+\infty} df_n$. [Rv] 107

Ex 34: Différentielle (et différentiabilité) de l'exponentielle matricielle. [Rv] 107

Cor 35: Si $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est $\mathbb{K}$-dérivable sur D, et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ CVS et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ CVU, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathbb{K}$-dérivable sur D, et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$. [EA] 197

III - Applications des séries entières

A- Combinatoire

[Bê] 266 **Thm 36** (nombres de Bell et formule de Doblinski) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note B_n le nombre de relations d'équivalence sur un ensemble à n éléments. Par convention, $B_0 = 1$.

DEV 1

1. $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$
2. La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, et sa somme S vérifie : $\forall t \in]-R, R[$, $S'(t) = e^t S(t)$.
3. Formule de Doblinski : $B_n = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^n}{p!}$

B- Série génératrice d'une variable aléatoire entière positive

Dans ce paragraphe, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace probabilisé, et X est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$.

[CR] 41 **Def 37** : La fonction génératrice de X est $G_X : s \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) s^n$.

[CR] 41 **Prop 38** : Le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X=n) s^n$ est supérieur ou égal à 1

Prop 39 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

[CR] 41 **Cor 40** : La fonction génératrice caractérise la loi.

[CR] 42 **Prop 41** : X admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si, et seulement si G_X est p fois dérivable en 1. Le cas échéant, $G_X^{(p)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1) \cdots (X-p+1)]$

IV - Application des séries de Fourier

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose $\hat{f} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} f(t)\,dt$.

Le symbole $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ désigne $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N}$.

Thm 42 (de Dirichlet) : [EA] 314

Thm 43 (formule de Poisson) : $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi n t}$ [Bê] 253

Thm 44 (d'échantillonnage de Shannon) : Soit $f \in S(\mathbb{R})$, supposons $\hat{f}$ nulle en-dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}(\pi(n-t))$ où sinc est la fonction sinus cardinal.

DEV2

Thm 45 : Expression de $\zeta(2k)$ [FGN]

Rq 46 : Cas de $\zeta(2)$

RÉFÉRENCES

[EA] : Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. (Mohammed El Amrani).

[B] : Analyse pour l'agrégation de mathématiques (J. & L. Bernis).

[FGN] : Oraux X-ENS – Analyse 2 (Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas)

[CR] : Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques (Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch)

[Rv] : Petit guide du calcul différentiel (François Rouvière) [4e édition]