209

Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I – Approximation uniforme sur un compact

Dans cette section, (X,d) est un espace métrique compact. Lorsque X est un segment de $\mathbb{R}$, on note $X=[a,b]$. Le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Abréviation : CVU = "converge uniformément".

[Go] 238 Thm 1 (de DINI) : 1▸ Soit $(f_n)_n \in C^0(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Si $(f_n)_n$ est croissante et converge simplement vers $f \in C^0(X,\mathbb{R})$, alors $(f_n)_n$ CVU vers f.

2▸ Soit $(f_n)_n \in C^0([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est croissante. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers $f\in C^0([a,b],\mathbb{R})$, alors $(f_n)_n$ CVU vers f.

[HL] 26 Ex 2 : Soit $(P_n)_n \in C^0([-1,1],\mathbb{R})$ définie par $P_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}^2 - P_n^2)$. La suite $(P_n)_n$ CVU vers $x\longmapsto |x|$.

[HL] 26-30 Thm 3 (de STONE-WEIERSTRASS) : Toute sous-algèbre de $C^0(X,\mathbb{K})$ séparante (i.e. telle que $\forall (x,y)\in X^2$, $x\neq y \Rightarrow \exists f \cdot f(x)\neq f(y)$), unitaire et stable par conjugaison est dense dans $(C^0(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$. DEV 1

II – Approximation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$

A- Approximation et convolution

[F] ~117 Def 4 : Pour toutes $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{K}$, si $t\longmapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, donc la convolée de f et g est définie pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ par $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,g(x-t)\,dt$.

[F] 116-120 Ex 5 : On peut prendre (f,g) dans $L^p\times L^q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ ou $L^1\times L^p$.

[F] 123 Thm 6 : Si $f\in L^p(\mathbb{R})$ et $g\in C_c^n(\mathbb{R})$, alors $f*g\in C^n(\mathbb{R})$, et $(f*g)^{(n)} = f*g^{(n)}$.

Def 7 : On dit que $(\alpha_n)_n$ est une approximation de l'unité si c'est une suite de fonctions mesurables telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, [Go] 304

1▸ $\alpha_n\geqslant 0$ 2▸ $\int_{\mathbb{R}}\alpha_n = 1$ 3▸ $\forall\delta>0$, $\int_{|t|>\delta}\alpha_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Prop 8 : Soit $f\in C_c^0(\mathbb{R})$ (resp. $f\in L^p(\mathbb{R})$), soit $(\alpha_n)_n$ une approximation de l'unité. La suite $(f*\alpha_n)_n$ converge uniformément (resp. en norme p) vers f sur $\mathbb{R}$. [Go] ~304

B- Approximation polynomiale des fonctions régulières

Thm 9 (de WEIERSTRASS polynomial) : Toute fonction scalaire continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. [Go] 304

Ex 10 : Si $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ vérifie $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0$, alors $f=0$. [Go] 306

Prop 11 : Soit $f\in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$, soient $x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ distincts. Notons P le polynôme d'interpolation de LAGRANGE de $(x_1,\dots,x_n)$ en $(f(x_1),\dots,f(x_n))$. Pour tout $x\in[a,b]$, $|f(x)-P(x)| \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\prod_{j=1}^{n}|x-x_j|$. [Dem] 23

Rq 12 : La question de la convergence est loin d'être évidente. Par exemple pour $x\longmapsto 1/(1+x^2)$, la suite d'interpolation en les subdivision à pas constant de $[-1,1]$ ne converge pas simplement (phénomène de RUNGE, admis). FIGURE 1 [Dem] 87

Prop 13 : Pour $f\in C^0([a,b])$, il existe une unique fonction polynomiale $P_n\in\mathbb{K}_n[x]$ telle que $d(f,\mathbb{K}_n[x]) = \|f-P_n\|_\infty$. [Dem] 41

Thm 14 (formule de TAYLOR-YOUNG avec reste intégral) : Soient $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ [Go] 77 un segment $(a<b)$, $(E,\|\cdot\|)$ un espace de Banach, et $f \in C^{n+1}([a,b],E)$.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,dt$$

Ex 15 : $\forall x \geq 0,\quad 1-\frac{x^2}{2!} \leq \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$

$\forall x \geq 0,\quad x-\frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x$

$\forall x > 0,\quad x-\frac{x^2}{2!} \leq \ln(1+x) \leq x$

C - Densités dans les espaces de Lebesgue

On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \lim_{\pm\infty} f = 0\}$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ nulles en dehors d'un compact, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$.

[BP] 171 Thm 16 : $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),\|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

[BP] 297 Prop 17 : Soient $1<p,q<+\infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Pour toutes $f \in L^p$ et $g \in L^q$, $f*g(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f*g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

[BP] 287 Prop 18 : Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f*g(x)$ est bien définie, et $f*g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

[BP] 300 Prop 19 : Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. La convolée $f*g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}$, et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$ (inégalité de Young).

[BP] 308 Thm 20 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}),\|\cdot\|_p)$ pour $1 \leq p < +\infty$).

Prop 21 : $\mathcal{C}^1([a,b])$ est dense dans $(L^1([a,b]),\|\cdot\|_1)$.

[F] 106 Ex 22 : (Lemme de Riemann-Lebesgue) : $\forall f \in L^1([a,b]),\ \int_a^b f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \xrightarrow[|\lambda|\to+\infty]{} 0$.

III - Approximation périodique

A - Coefficients et séries de Fourier

On note $L^p_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions p-intégrables et 2π-périodiques.

Def 23 : Pour $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n^e coefficient de Fourier de f : [Go] 268 [EA] 173

$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt$$

On pose également $a_n(f) = (c_n(f)+c_{-n}(f))/2$ et $b_n(f) = (c_n(f)-c_{-n}(f))/2i$ [EA] 177

Def 24 : Pour $f \in L^1_{2\pi}$, on définit sa série de Fourier comme la série de somme partielle $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\,e_n$ où $e_n : t \longmapsto e^{int}$. [Go] 269 [EA] 178

B - Théorèmes de convergence autour des séries de Fourier

Def 25 : Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit le N^e noyau de Dirichlet : $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$ [EA] 184

Prop 26 : $S_N(f) = D_N * f$ [EA] 185

Thm 27 (de Dirichlet) : Soient f C^1 par morceaux 2π-périodique et $x \in \mathbb{R}$. [EA] 196

$$S_N(f)(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

En particulier, si f est de plus continue, alors f est somme de sa série de Fourier.

Def 28 : ▸ Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on définit le N^e noyau de Fejér : $K_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n$ [EA] 185

▸ Pour $f \in L^1_{2\pi}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on définit $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = K_N * f$.

Prop 29 : La suite $\left(K_N : t \longrightarrow \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\frac{t}{2})}{\sin(t/2)}\right)^2\right)_{N\geq 1}$ est une approximation de l'unité 2π-périodique. [EA] 186

Thm 30 (de Fejér) : Soit $f \in C^0_{2\pi}$. [EA] 190

1▸ $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ 2▸ $\|\sigma_N(f)-f\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Même résultat pour $f \in L^p_{2\pi}$ avec $\|\cdot\|_p$.

<u>Thm 31</u> (de Weierstrass trigonométrique) : Toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

[EA] ~192 <u>Rq 32</u> : Les deux théorèmes de Weierstrass sont équivalents.

[EA] 201 202 <u>Prop 33</u> : ▸ Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^k_{2\pi}$, alors $c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$

▸ Soit $k \geq 2$. Si $c_n(f) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$, alors $f \in C^{k-2}_{2\pi}$.

<u>Cas $p = 2$</u>

<u>Cor 34</u> : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

<u>Cor 35</u> : $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{|n|\leq n})$.

[EA] 193 <u>Cor 36</u> (égalité de Parseval) : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$

[EA] 195 <u>Cor 37</u> : $f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective

<u>Ex 38</u> : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ avec $f : x \longmapsto x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

C - Application à l'équirépartition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

[FGN] 47 <u>Def 39</u> : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équirépartie modulo 1* si :

$$\forall (a,b) \in [0,1[^2,\ a < b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N}\#\{n \in [\![1,N]\!] \mid a \leq \{u_n\} < b\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} b-a$$

où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie fractionnaire de $x \in \mathbb{R}$.

FIGURE 2

[FGN] 47 <u>Thm 40</u> (critère de Weyl) : Les assertions suivantes sont équivalentes :

1▸ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équidistribuée modulo 1

2▸ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et 1-périodique, alors $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 f$

3▸ Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k u_n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

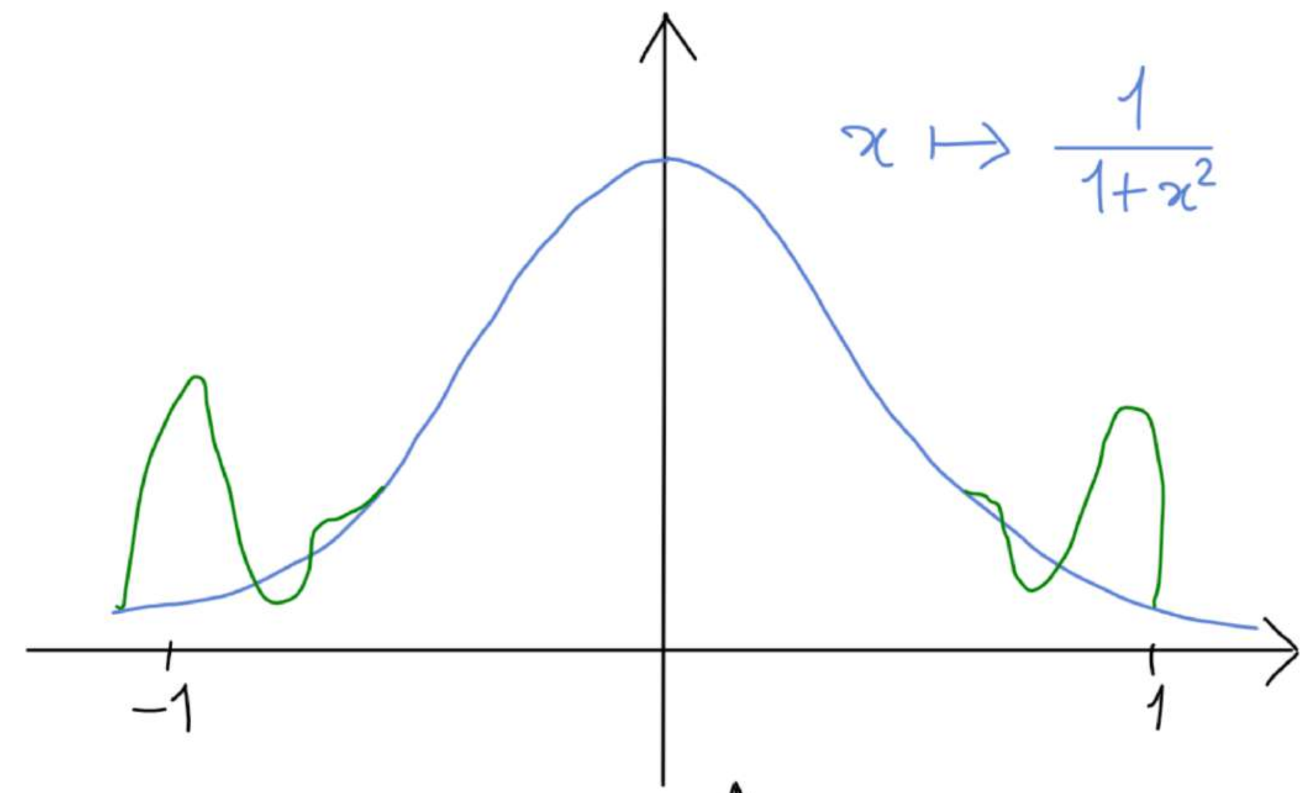
DEV 2

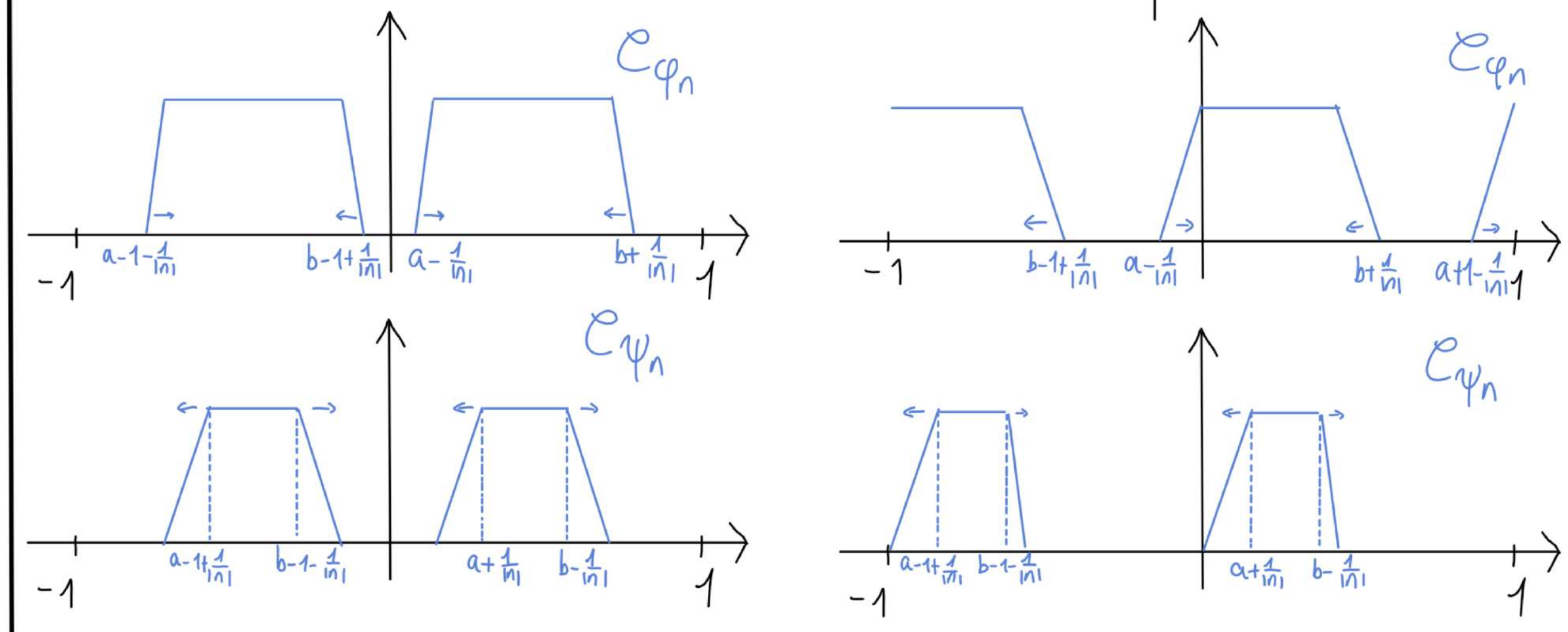
<u>Ex 41</u> : ▸ Soit $\gamma > 0$. La suite $(n\gamma)_{n\in\mathbb{N}}$ est équidistribuée modulo 1 si, et seulement si $\gamma \notin \mathbb{Q}$.

▸ $(\{\log(n)\})_{n\geq 1}$ n'est pas équirépartie

<u>Prop 42</u> : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1, alors $\{\{u_n\} : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$, autrement dit l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\{u_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ est $[0,1]$.

FIGURE 1





Si $a > 0$ FIGURE 2 Si $a = 0$

<u>Références</u>

[Go] [F]

[Dem] [EA]

[BP]