148

Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I - Décompositions en lien avec la réduction

Lemme 1 (des noyaux) :
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad P \wedge Q = 1 \Rightarrow \operatorname{Ker}((PQ)(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$$

A - Décomposition de Dunford

[G] **Lemme 2** : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. Notons $P = M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en produit d'irréductibles (à un facteur inversible près) dans $\mathbb{K}[X]$. Pour $i \in [\![1,s]\!]$, posons $N_i := \operatorname{Ker}(M_i^{\alpha_i}(u))$ et notons p_i le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$.
Pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $p_i \in \mathbb{K}[u]$, pour tout $j \neq i$, $p_i \circ p_j = 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = id_E$.

Thm 3 (décomposition de Dunford) : Si M est trigonalisable, alors il existe un unique couple $(D,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $M = D+N$, $DN = ND$, D est diagonalisable et N est nilpotente.

Prop 4 : Si $M = D+N$ est la décomposition de Dunford de M, alors
$$e^M = e^D + e^D(e^N - I_n) \text{ est celle de } e^M.$$

Appli 5 : e^M est diagonalisable si et seulement si M l'est. DEV 1

Ex 6 :
- $\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$ est une décomposition de Dunford
- $\begin{pmatrix} 1&1\\0&2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0\\0&2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&1\\0&0 \end{pmatrix}$ n'est pas une décomposition de Dunford
- $\begin{pmatrix} 1&a&0\\0&2&b\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&a&ab\\0&2&b\\0&0&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&-ab\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$ est une décomposition de Dunford.

Algo 7 : Supposons χ_M scindé, posons $P = \prod_{\lambda \in Sp(M)} X - \lambda = \dfrac{\chi_M}{\chi_M \wedge \chi_M'}$.
La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $M_0 = M$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1}$ est bien définie, stationnaire et converge vers la composante diagonalisable de la décomposition de Dunford de M.

Rq 8 : Soit $M = D+N$ la décomposition de Dunford de M. Notons p l'indice de nilpotence de N. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $D = P\,\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P\,\operatorname{Diag}(\lambda_1^{k-i}, \dots, \lambda_n^{k-i}) P^{-1} N^i$

  et $\forall i \geq p$, $N^i = 0$
- $e^M = e^D e^N = P\,\operatorname{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} \dfrac{N^k}{k!}$

La décomposition de Dunford permet de simplifier les calculs de puissances ou d'exponentielles (utile par exemple pour les systèmes d'équations différentielle linéaires à coefficients constants d'ordre 1).

Cor 9 :
- $e^M \in \mathbb{K}_{n-1}[M]$
- Si M est trigonalisable, alors $M \in \mathbb{K}_{n-1}[e^M]$

B - Décomposition de Jordan des matrices nilpotentes

Def 10 :
- On appelle bloc de Jordan de taille d la matrice :
$$J_d := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$
- Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{N}^r$, on pose $J_\lambda = \operatorname{Diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_r})$.

Thm 11 (décomposition de JORDAN des endomorphismes nilpotents) : Supposons u nilpotent d'indice λ_1. Il existe $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r$ telle que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = n$, et $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)}$. Cette décomposition est unique.

C- Une application : le critère de diagonalisabilité de KLARÈS

Thm 12 (critère de KLARÈS) : Posons $\mathrm{ad}_u : v \in \mathcal{L}(E) \longmapsto u \circ v - v \circ u$.
Si u est trigonalisable, alors :

$$u \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_u^2)$$

DEV 2

II - Décompositions des matrices réelles

A - Racine carrée d'une matrice positive et décomposition polaire

Lemme 13 : Si $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe une unique matrice $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M = S^2$. De plus, S est dans le bicommutant de M. La matrice S est appelée racine carrée de M, et est notée $\sqrt{M}$ ou $M^{\frac{1}{2}}$.

Thm 14 (décomposition polaire) :

1. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \exists (\Theta, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) : \quad M = \Theta S$
2. $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \quad \exists ! (\Theta, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) : \quad M = \Theta S$

   Plus précisément, $\mu : (\Theta, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longmapsto \Theta S$ est un homéomorphisme.

Rq 15 : Non unicité dans le cas non inversible :

Rq 16 : On a le même résultat sur $\mathbb{C}$ en remplaçant $O_n(\mathbb{R})$ par $U_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t\bar{A} A = I_n\}$ et $S_n^{+(+)}(\mathbb{R})$ par $\mathcal{H}_n^{+(+)}(\mathbb{C})$.

Rq 17 : S est l'analogue du module complexe et Θ l'analogue de l'argument complexe.

Algo 18 : Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, alors la suite $(M_n)_{n \geqslant 0}$ défini par $M_0 = M$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = \frac{1}{2} M_n (I_n + ({}^tM_n M_n)^{-1})$ converge vers la composante orthogonale de la décomposition polaire de M, et $({}^tM_n M_n)_n$ converge vers la composante symétrique. [C]

B- Décompositions du type $M = {}^tAA$

Prop 19 : $\forall \Gamma \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \ \exists A \in GL_n(\mathbb{R}) : \Gamma = {}^tAA$

Appli 20 : Si $Z \sim \mathcal{N}_n(0, I_n)$ et si $\Gamma = {}^tAA$, alors $m + AZ \sim \mathcal{N}_n(m, \Gamma)$.
On en déduit l'existence des mesures gaussiennes multidimensionnelles.

Thm 21 (décomposition de CHOLESKY) : Si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il existe L triangulaire inférieure telle que $M = L\,{}^tL$. Si de plus on impose la stricte positivité des coefficients diagonaux de L, alors cette décomposition est unique.