

Dev 12 - Étude du groupe $\mathcal{I}_4$ (Algèbre)

Lemme 1: Un π -groupe $H \leq G$ est distingué si c'est une union de classes de conjugaison de G .

Proposition 1: a) $\mathcal{I}_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$

b) le groupe de Klein $V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ est un π -groupe distingué de $\mathcal{I}_4$.

Lemme 2: Un groupe d'ordre pair admet un élément d'ordre 2.

Proposition 2: $\mathcal{I}_4$ n'admet pas de π -groupe d'ordre 6.

Preuve lemme 1: (Idée: Double implication)

" $\Rightarrow$ " Supposons $H \trianglelefteq G$. Alors $\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$, d'où $\forall h \in H, h \in \text{Cib}(h) = \{ghg^{-1} \mid g \in G\} \subset H$.

Donc $\bigcup_{h \in H} \text{Cib}(h) \subset H = \bigcup_{h \in H} H \subset \bigcup_{h \in H} \text{Cib}(h)$, ainsi $H = \bigcup_{h \in H} \text{Cib}(h)$ est une union de classes de conj.

" $\Leftarrow$ " Supposons que H est une union de classes de conjugaison de G . Alors il existe $E \subset G$ tq $H = \bigcup_{a \in E} \text{Cib}(a)$.

Soient $g \in G$ et $h \in H$. On veut m. $ghg^{-1} \in H$.

Il existe $a \in E$ tq $h \in \text{Cib}(a)$, ainsi il existe $\tilde{g} \in G$ tq $h = \tilde{g} a \tilde{g}^{-1}$.

D'où $ghg^{-1} = g\tilde{g} a \tilde{g}^{-1} g^{-1} = (g\tilde{g}) a (g\tilde{g})^{-1} \in \text{Cib}(a) \subset H$.

Donc $H \trianglelefteq G$.

Preuve proposition 1:

a) Les types possibles pour les éléments de $\mathcal{I}_4$ sont $[1,1,1,1], [1,1,2], [1,3], [4]$ et $[2,2]$.

On voit que, $\forall \sigma \in \mathcal{I}_n$ de type $[l_1, \dots, l_m]$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\sum_{i=1}^m l_i - m}$.

Ainsi, par déf du groupe alterné, les éléments de $\mathcal{I}_4$ sont les permutations de $\mathcal{I}_4$ de types $[1,1,1,1], [1,3], [2,2]$.
D'où le résultat.

b) • Montrons que $V_4 \trianglelefteq \mathcal{I}_4$: $e \in V_4$

les éléments de V_4 sont d'ordre ≤ 2 , donc les inverses sont eux-mêmes, d'où la stabilité par inversion.

la stabilité de V_4 par loi interne de $\mathcal{I}_4$ se montre à la main.

• Il reste à montrer $V_4 \trianglelefteq \mathcal{A}_4$. Pour ce faire, on va utiliser le lemme 1.

D'abord, $h \in \mathcal{A}_4$ est une classe de conj. de $\mathcal{A}_4$.

Ensuite : Soit $\sigma := (12)(34) \in V_4$. Notons $\text{stab}_{\mathcal{A}_4}(\sigma)$ la classe de conj. de $\mathcal{A}_4$ de σ ($\sigma \in \mathcal{A}_4$ fixe.) $\text{stab}(\sigma) = \text{le } \mathcal{P}_4 \text{ de } \sigma$.

$$\text{On a } \text{stab}_{\mathcal{A}_4}(\sigma) = \{g\sigma g^{-1}, g\sigma \mathcal{A}_4 g^{-1} = \{g\sigma g^{-1}, g\sigma \mathcal{P}_4 g^{-1} = \text{stab}(\sigma) = V_4 \setminus \{e\}$$

(en deux permutations de $\mathcal{P}_4$ sont conjuguées si elles ont le même type)

$$\text{De plus, } \begin{cases} (123)\sigma(123)^{-1} = (23)(14) = (14)(23) \\ (132)\sigma(132)^{-1} = (31)(24) = (13)(24) \end{cases} \text{ d'où } V_4 \setminus \{e\} \subset \text{stab}_{\mathcal{A}_4}(\sigma)$$

(car $\sigma = e \sigma e^{-1}$)

Ainsi $V_4 \setminus \{e\} = \text{stab}_{\mathcal{A}_4}(\sigma)$ est une classe de conj. de $\mathcal{A}_4$.

Donc $V_4 = \{e\} \cup (V_4 \setminus \{e\})$ est une union de classes de conj. de $\mathcal{A}_4$. Donc $V_4 \trianglelefteq \mathcal{A}_4$.

Preuve lemme 2: (Ibid. Contreposition)

Soit G un groupe fini. Supposons que $\forall g \in G, \text{ord}(g) \neq 2$.

L'application $h \in G \mapsto h^{-1} \in G$ est une bijection par déf. de G un groupe.

Ainsi, $\hat{G}$ de plus G est fini, alors G est une union finie disjointe d'ensembles de la forme $\{h, h^{-1}\}$ ou $\{h\} \in G$.

Mais $\forall g \in G, g = g^{-1}$ si $\text{ord}(g) \leq 2$

Il n'y a pas d'éléments d'ordre 2 dans G (par hypothèse)

1 élément neutre est le seul élément d'ordre 1 dans G .

Donc $|G|$ est nécessairement impair. D'où le résultat voulu par contreposition.

Preuve proposition 2: (Ibid. Par l'absurde)

(Par l'abs) supposons qu'il existe un n -groupe $H \trianglelefteq \mathcal{A}_4$ d'ordre 6. Alors $(\mathcal{A}_4 : H) = \frac{12}{6} = 2$, d'où $H \trianglelefteq \mathcal{A}_4$.

(car les 3-cycles sont d'ordre 3)

D'autre part, d'après le lemme 2, H contient un élément $\sigma \in \mathcal{A}_4$ d'ordre 2, d'où $\sigma \in V_4 \setminus \{e\}$ nécessairement.

Ainsi $V_4 \setminus \{e\} \subset H$

(puisque $H \trianglelefteq \mathcal{A}_4$ et $V_4 \setminus \{e\}$ est une classe de conj. de $\mathcal{A}_4$)

De plus, $e \in H$ car $H \trianglelefteq \mathcal{A}_4$. Donc $V_4 \subset H$, et ainsi $V_4 \trianglelefteq H$.

D'où, par le th. de Lagrange, $|V_4|$ divise $|H|$, c'est-à-dire $4 \mid 6$, c'est absurde!

On a donc le résultat voulu.