Exemples de décomposition de matrices. Applications.

148

Soit K un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in End(E)$ et soit A la matrice associée.

I. Réduction de matrices :

1) Eléments propres :

P. 171 – 174 GOU

Définition 1 : Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est valeur propre de A s'il existe $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax = \lambda x$. Un tel vecteur x est dit vecteur propre.

Définition 2 : Soit λ une valeur propre de A. L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid Ax = \lambda x\} = Ker(A - \lambda I_n)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par A. C'est le sous-espace propre de A associé à λ.

Théorème 3 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de A, 2 à 2 distinctes. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

Définition 4 : On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $K[X]$ défini par $\chi_A(X) = Det(A - X I_n)$.

Proposition 5 : λ est valeur propre de A si et seulement $\chi_A(\lambda) = 0$.

P. 186

Définition 6 : Le polynôme unitaire de plus bas degré annulant A s'appelle le polynôme minimal de A. Il est noté μ_A.

Proposition 7 : $\lambda \in Sp(A)$ si et seulement si λ est racine de μ_A.

Théorème 8 (Cayley-Hamilton) : μ_A divise χ_A.

2) Diagonalisation.

P. 174 GOU

Définition 9 : A est diagonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 10 : Si χ_A est scindé sur K à racines simples alors A est diagonalisable.

Proposition 11 : Soit $\lambda \in K$ une valeur propre de A de multiplicité h. Alors $\dim(E_\lambda) \leq h$.

Théorème 12 : Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est diagonalisable.

(ii) χ_A est scindé sur K et pour toute racine λ_i de χ_A d'ordre de multiplicité h_i, $h_i = \dim E_{\lambda_i}$.

(iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de A vérifiant $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$.

P. 186

Corollaire 13 : A est diagonalisable si et seulement si μ_A est scindé à racines simples.

Exemple 14 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

P. 177 GOU

Exemple 15 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

3) Trigonalisation.

P. 174 – 175

Définition 16 : A est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 17 : A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur K.

Corollaire 18 : Si K est algébriquement clos alors A est trigonalisable.

P. 177

Exemple 19 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable

Exemple 20 : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ sont trigonalisables.

4) Décomposition de Jordan :

A/ Matrices nilpotentes :

GOU P. 207 – 208

Définition 21 : $A \in M_n(K)$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

Proposition 22 : Si A est nilpotente alors $\chi_A = X^n$. La réciproque est vraie.

Proposition 23 : Si A est nilpotente alors $Tr(A^k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 24 : Si A est nilpotente alors il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $A = PJP^{-1}$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & v_{n-1} \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $v_i \in \{0, 1\}$.

P. 173

Exemple 25 : Toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ nilpotente admet $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ comme bloc de Jordan, $a, b, c, d \neq 0$.

B/ Cas général.

Théorème 26 : Supposons que χ_A soit scindé sur K. On écrit $\chi_A = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Alors la décomposition de Jordan de A est $J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1, s]\!]$, $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & v_{i,\alpha_i - 1} \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(K)$ où $\forall (i,j)$, $v_{ij} \in \{0, 1\}$.

Exemple 27 : La décomposition de Jordan d'une matrice A de polynôme caractéristique $\chi_A = (X-2)^3(X-1)^2$ où $\dim(E_1) = 1$ et $\dim(E_2) = 2$ est $\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$ où $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ou $J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

II. Approche linéaire :

1) Prérequis

GOU p. 175 - 176 **Proposition 28** : Soient $A, B \in M_n(K)$ telles que $AB = BA$. Alors :
(i) Tout sous-espace propre de A est stable par B (en particulier $Ker(A)$)
(ii) $Im(A)$ est stable par B.

Théorème 29 : [Diagonalisation simultanée] : Si $A, B \in M_n(K)$ sont diagonalisables et $AB = BA$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales. On dit que A et B sont codiagonalisables.

GOU p201 - 202 **Définition 30** : Supposons χ_A scindé sur K : $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, le sous-espace vectoriel $N_i = Ker(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$ s'appelle le sous-espace caractéristique de A associé à λ_i.

Proposition 31 : 1) Pour tout i, N_i est stable par f,
2) On a $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$,
3) Pour tout i, $\dim N_i = \alpha_i$.

2) Décomposition de Dunford

GOU **Théorème 32 : DEV 1** : Supposons que χ_A soit scindé sur K. Alors il existe un unique couple $(D, N) \in M_n(K) \times M_n(K)$ avec D diagonalisable et N nilpotente tel que :
1) $A = D + N$ 2) $DN = ND$.

ROM 23 III **Application 33 [Exponentielle de matrices] DEV 1**
Supposons que $D+N$ soit la décomposition de Dunford de A. Alors :
1) $e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k$ avec p l'indice de nilpotence de N,
2) e^A admet une décomposition de Dunford donnée par $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ nilpotente.

Exemple 34 : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est sa propre décomposition de Dunford.
• $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ROM **Définition 35** : Une matrice $U \in M_n(K)$ est unipotente si la matrice $U - I_n$ est nilpotente.

Théorème 36 [Dunford multiplicative] : Supposons $A \in GL_n(K)$ avec χ_A scindé sur K. Il existe un unique couple $(D, U) \in M_n(K) \times M_n(K)$ avec D diagonalisable inversible et U unipotente telles que $A = UD = DU$. ROM 21 VIII

3) Théorème spectral et décomposition polaire :

Définition 37 : A est symétrique si ${}^tA = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques. ROM 22 VII + 22 IX.3

Théorème 38 [Spectral] : Toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, i-e il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tOAO$ soit diagonale.

Théorème 39 : Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors il existe une unique matrice $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.

Théorème 40 [Décomposition polaire] : Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $A = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque 41 : La décomposition polaire est aussi définie sur $M_n(\mathbb{R})$ mais on n'a plus unicité.

Théorème 42 : L'application $\phi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.

NB 43 : Ces résultats sont aussi vrais sur $\mathbb{C}$ avec $GL_n(\mathbb{C})$, $H_n(\mathbb{C})$, $H_n^+(\mathbb{C})$, $H_n^{++}(\mathbb{C})$ et $U_n(\mathbb{C})$.

III. Point de vue algorithmique :

1) Méthode du pivot de Gauss :

Définition 44 : Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de l'indice (i,j) qui vaut 1. ROM 21 VIII.1

Définition 45 : 1) Une matrice de transvection est une matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\lambda \in K$,
2) Une matrice de dilatation est une matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in K$.

Définition 46 [Opérations élémentaires] : 1) La multiplication à gauche [resp. à droite] par une matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ a pour effet de multiplier la ligne i [resp. la colonne i] par λ.

ROM 21 VIII.1

2) La multiplication à gauche [resp. à droite] par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ a pour effet de remplacer la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$ [resp. la colonne C_j par $C_j + \lambda C_i$].

Théorème 47 : Toute matrice $A \in GL_n(K)$ s'écrit :
$A = \prod_{k=1}^{r} P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^{s} Q_j$ où $P_1, \dots, P_r$ et $Q_1, \dots, Q_s$ sont des matrices de transvection et $\lambda = \det(A)$.

ROMANA p.170

Application 48 : La résolution d'un système linéaire de n équation à n inconnues par cette méthode nécessite $O(n^3)$ opérations.

2) Factorisation LU et décomposition de Cholesky :

CAR p.78-80

Définition 49 : Soit $A \in GL_n(K)$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on note Δ_k le k-ième mineur principal, i-e le déterminant de la sous-matrice $A_k := A_{[1,k][1,k]}$ correspondant au k-premières lignes et colonnes de A.

Théorème 50 DEV 2 : Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Les déterminants $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ ne sont pas nuls.
(ii) Il existe L triangulaire inférieure unipotente et U triangulaire supérieure telles que $A = LU$.

Lemme 51 DEV 2 : La décomposition LU est unique et la diagonale principale de U est donnée par $(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}})$

Lemme 52 : Si $A \in GL_n(K)$, A symétrique avec ses mineurs principaux non nuls, alors il existe un unique couple $(L,U) \in GL_n(K) \times GL_n(K)$ avec L triangulaire inférieure unipotente et D diagonale tel que $A = LD{}^tL$.

ROM 21 VIII.2.

Théorème 53 [Décomposition de Cholesky] : DEV 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une matrice B triangulaire inférieure inversible telle que $A = B{}^tB$. Cette décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de B.

ROM ANA p.201

Exemple 54 : La décomposition LU de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est donnée par $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

ROM ANA p.174

Application 55 : La décomposition LU facilite la résolution de systèmes linéaires $AX = B$ où $X \in \mathbb{R}^n$ est l'inconnue et $B \in \mathbb{R}^n$ est donné. Si $A = LU$, le système devient : $\begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$.

3) Factorisation QR.

ROM 21 VIII 4.

Théorème 56 : Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Théorème 57 [Iwasawa] : Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QDR$ où $Q \in O_n(\mathbb{R})$, D est diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et R une matrice triangulaire supérieure unipotente.

Références :

[GOU] : les maths en tête, Algèbre et probabilités, X. GOURDON,

[ROM] : Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et géométrie, J.-E. ROMBALDI,

[ROMANA] : Analyse matricielle, Cours et exercices résolus, J.-E. ROMBALDI,

[CAR] : Carnet de voyage en Algèbre, P. CALDERO et M. PERONNIER.