Fonction de Takagi

Énoncés : • Th : Notons $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique tq si $-1/2 \leq x \leq 1/2$, $\Delta(x) = |x|$.

La fonction $T : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Delta(2^p x)}{2^p} \end{cases}$, dite de Takagi, est continue et nulle part dérivable.

• Corollaire : Si $[a;b]$ est un segment, l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$.

⊗ Th.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, $\Delta(x) \leq 1/2$; la série définissant T est donc normalement convergente. Puisque Δ est continue, T l'est aussi. Pour $p \in \mathbb{N}$, $2^p \in \mathbb{N}$ donc $x \mapsto \Delta(2^p x)$ est 1-périodique : T l'est donc également. Pour mq T n'est dérivable nulle part il suffit de le montrer sur $[0;1[$: fixons $x \in [0;1[$.

• On écrit le développement dyadique propre de x : $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ avec $\varepsilon_k \in \{0,1\}$. Pour $n \geq 1$ on pose $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$ et $z_n = y_n + \frac{1}{2^n}$. On a $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x$. On va étudier les valeurs de T en ces deux suites. D'abord si $p \geq n$, $2^p y_n$ et $2^p z_n$ sont entiers donc $\Delta(2^p y_n) = \Delta(2^p z_n) = 0$.

Soient mtn $p < n$. Les parties fractionnaires de $2^p y_n$ et $2^p z_n$ sont $\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}$ et $\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}}$.

Si $\varepsilon_{p+1} = 0$, elles sont comprises entre 0 et $\sum_{k=p+2}^{n} \frac{1}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} = \sum_{l=0}^{n-p-2} \frac{1}{2^{l+2}} + \frac{1}{2^{n-p}}$

$= \frac{1}{4} \frac{1 - 2^{-(n-p-1)}}{1 - 2^{-1}} + 2^{p-n} = \frac{1 - 2^{p+1-n}}{2} + 2^{p-n} = \frac{1}{2}$. On a alors $\Delta(2^p y_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}\right)$

$= \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}}$ et $\Delta(2^p z_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}}\right) = \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}}$. Ainsi $\Delta(2^p z_n) - \Delta(2^p y_n) = \frac{1}{2^{n-p}}$.

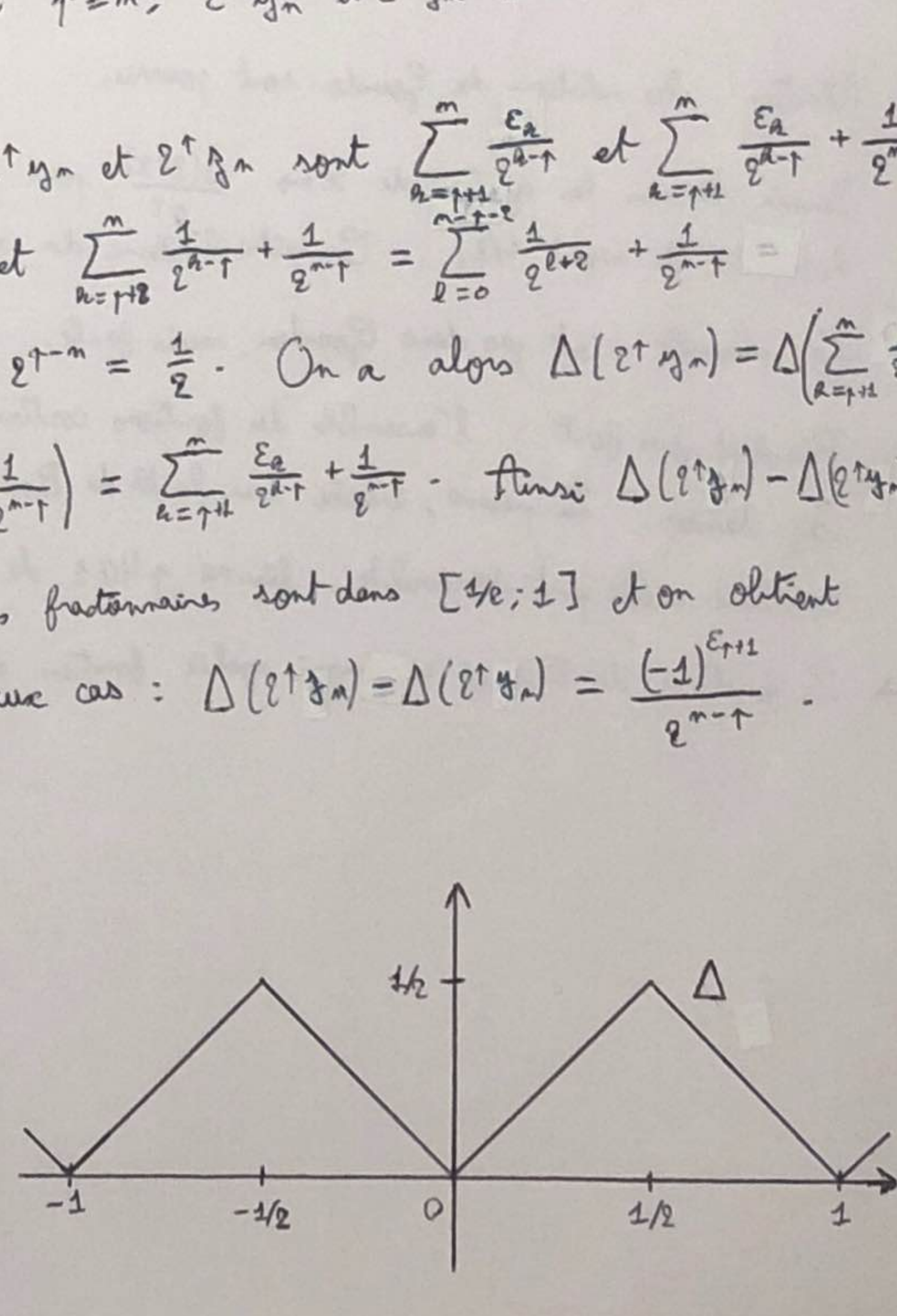
De même si au contraire $\varepsilon_{p+1} = 1$, les parties fractionnaires sont dans $[1/2;1]$ et on obtient $\Delta(2^p z_n) - \Delta(2^p y_n) = -\frac{1}{2^{n-p}}$. Dans les deux cas : $\Delta(2^p z_n) - \Delta(2^p y_n) = \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^{n-p}}$.

• Tout ceci nous permet d'écrire, pour $n \geq 1$,

$T(z_n) - T(y_n) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{\varepsilon_{p+1}}}{2^n}$, donc

$\frac{T(z_n) - T(y_n)}{z_n - y_n} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_{p+1}}$: ceci

ne converge pas pour $n \to \infty$.



- Vérifions pour finir que cela entraîne T non dérivable en x. Par l'absurde on suppose T dérivable en x. Soient $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tq $f(y_n)-f(x) = (y_n-x)(f'(x)+\alpha_n)$ et $f(z_n)-f(x) = (z_n-x)(f'(x)+\beta_n)$. Par différence, $f(z_n)-f(y_n) = (z_n-y_n)f'(x) + (z_n-x)\beta_n + (x-y_n)\alpha_n$.
  Vu que $y_n \leq x \leq z_n$ on a $|f(z_n)-f(y_n)-(z_n-y_n)f'(x)| \leq (z_n-y_n)(|\alpha_n|+|\beta_n|)$, puis
  $\left|\frac{f(z_n)-f(y_n)}{z_n-y_n} - f'(x)\right| \leq |\alpha_n|+|\beta_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est une contradiction avec le résultat qui précède. □

⊛ Corollaire.

On se place sur le segment $[a;b]$; on note encore T. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$: $f-T \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ donc par le th d'approximation de Weierstrass il existe P_n polynomiale tq $P_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f-T$. Alors $T+P_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$, avec $T+P_n$ dérivable nulle part (car P_n est dérivable partout). D'où le résultat. □

Réf : Gourdon – Analyse : p 84 (th).

↳ Attention : les notations de Gourdon sont pourries.

↳ Savoir tracer les graphes de $x \mapsto \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}$ pour p petit (dents de scies ; passer à l'étape suivante : homothétie de rapport 1/2). Connaître l'allure du graphe de T (fractale).

↳ La densité n'est pas dans Gourdon, mais facile.

↳ Résultat plus fort : l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables de $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ contient un G_δ dense. La preuve, basée sur le th de Baire et ne nécessitant pas la construction d'une fonction continue nulle part dérivable, figure p 401 de Gourdon.

↳ La fonction de Takagi est aussi appelée fonction du blanc-manger (en référence à l'allure de son graphe).