/

Prolongement des applications uniformément continues et linéaires continues

Leçons : 207, 208.

__Énoncés :__ • Th : E un espace métrique, $A \subset E$ dense, F un espace métrique complet. Une appli $f : A \to F$ uniformément continue se prolonge de façon unique en appli $\bar{f} : E \to F$ uniformément continue.

• corollaire : E un evn, $A \subset E$ un sev dense, F un espace de Banach. Une appli linéaire continue $f : A \to F$ se prolonge de façon unique en appli linéaire continue $\bar{f} : E \to F$. De plus on a alors $|||\bar{f}||| = |||f|||$.

⊛ __Th.__

• On va d'abord définir un prolongement.

Soit $x \in E$, par hyp soient $a_n \in A$ tq $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Mq $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F, pour cela on mq elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. f est uniformément continue : soit $\delta > 0$ tq si $a, b \in A$ vérifient $d(a,b) \le \delta$ alors $d'(f(a), f(b)) \le \varepsilon$ (on note d la distance de E et d' celle de F). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans E) donc est de Cauchy : soit $N \in \mathbb{N}$ tq si $m, n \geq N$, $d(a_m, a_n) \le \delta$. Alors pour $m, n \geq N$, $d'(f(a_m), f(a_n)) \le \varepsilon$: c'est ce que l'on cherchait.

Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc ; mq leur limite est commune. On note l_a et l_b les limites respectives. On pose ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$: cela déf une suite de A qui tend vers x. La suite $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc encore une limite l_c ; or $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en sont des sous-suites, entraînant $l_a = l_c = l_b$.

Cela permet de déf, pour $x \in E$, $\bar{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ quelle que soit la suite $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ de A. En particulier pour $a \in A$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a$ et $\bar{f}(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a) = f(a)$: $\bar{f} : E \to F$ est bien un prolongement de f.

• Mq $\bar{f}$ est uniformément continue sur E.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp soit $\delta > 0$ tq si $a, b \in A$ vérifient $d(a,b) \le \delta$ alors $d'(f(a), f(b)) \le \varepsilon$. Prenons $x, y \in E$ tq $d(x,y) \le \delta/2$. Soient $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ dans A : $d(a_n, b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} d(x,y)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tq si $n \geq N$, $d(a_n, b_n) \le \delta$. On a alors $d'(f(a_n), f(b_n)) \le \varepsilon$. Mais $d'(f(a_n), f(b_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} d'(\bar{f}(x), \bar{f}(y))$ par déf de $\bar{f}$ (en effet $f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{f}(x)$ et $f(b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{f}(y)$). En passant à la limite cela donne $d'(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \le \varepsilon$. D'où la continuité uniforme.

- Mq $\overline{f}$ est l'unique prolongement de f à E qui soit uniformément continu.

  Soit $\tilde{f}$ un tel prolongement. $h = d'(\overline{f}, \tilde{f})$ est une appli continue sur E qui est nulle sur A.

  Par densité $h = 0$, ce qui signifie $\overline{f} = \tilde{f}$. $\square$

⊗ Corollaire.

- Une appli linéaire continue étant uniformément continue (sa norme est finie), l'unicité découle du th.

  Le th assure aussi qu'il existe un prolongement $\overline{f} : E \to F$ uniformément continu de f : mq $\overline{f}$ est linéaire.

  Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in K$ (le corps de base) ; soient $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ dans A. On a $\lambda a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda x + y$. Alors $\overline{f}(\lambda x + y) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\lambda a_n + b_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$
  $= \lambda \overline{f}(x) + \overline{f}(y)$.

- Mq $|||\overline{f}||| = |||f|||$.

  D'abord $|||\overline{f}||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\overline{f}(x)\| \geq \sup\limits_{\substack{a\in A\\ \|a\|=1}} \|\overline{f}(a)\| = \sup\limits_{\substack{a\in A\\ \|a\|=1}} \|f(a)\| = |||f|||$.

  Réciproquement soit $x \in E \setminus \{0\}$, et soit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ dans A. Puisque $x \neq 0$, apcr $a_n \neq 0$, et

  $$\frac{\|\overline{f}(x)\|}{\|x\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\overline{f}(a_n)\|}{\|a_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|f(a_n)\|}{\|a_n\|} \leq |||f|||.$$ On en déduit $|||\overline{f}||| \leq |||f|||$. $\square$

Complément : appli : th de Fourier-Plancherel (preuve partielle).

On note la transformée de Fourier réelle $\mathcal{F} : \begin{cases} L^1 \to \mathcal{C}^0_0 \\ f \mapsto \hat{f} \end{cases}$.

$\rightsquigarrow$ Si $f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f} \in L^2$ avec $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. De plus $\mathcal{F}(L^1 \cap L^2)$ est dense dans L^2.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ se prolonge en un automorphisme isométrique de L^2.

Preuve (partielle).

On admet le 1^e point. Si $f \in L^2$, pour $n \in \mathbb{N}$ $f\mathbb{1}_{[-n;n]} \in L^1 \cap L^2$ et $f\mathbb{1}_{[-n;n]} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$: $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^1.

On peut donc appliquer le corollaire avec $E = F = L^2$ et $A = L^1 \cap L^2$ pour obtenir $\mathcal{F}_2 : L^2 \to L^2$ linéaire continue qui prolonge la TF. Si $f \in L^2$, soit $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$ dans $L^1 \cap L^2$: $\|\hat{f}\|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$; $\mathcal{F}_2$ est une isométrie (en particulier elle est injective).

Reste à montrer la surjectivité : soit $g \in L^2$. Par densité de $\mathcal{F}(L^2 \cap L^2)$ dans L^2, soient $f_n \in L^1 \cap L^2$ tq $\hat{f}_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} g$.

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, $\|f_m - f_n\|_2 = \|\hat{f}_m - \hat{f}_n\|_2$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^2 : elle admet une limite $f \in L^2$.

Alors $g = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n = \hat{f}$. $\square$

Réf : • Dantzer – Mathématiques pour l'agrégation interne : p 47 (th), p 182 (corollaire).
• Rudin : p 225 (cpl).

↳ La continuité uniforme est indispensable. Contre-ex si on l'enlève : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ dense dans $\mathbb{R}$.

↳ Avoir $\overline{f}$ continue impose en particulier $\overline{f}(x) = \lim_{\substack{a \to x \\ a \in A}} f(a)$: il est naturel de chercher à déf $\overline{f}$ comme cela.

↳ Rappel : la distance est continue (de E^2 dans $\mathbb{R}$).

↳ Dans le point 1 du th : Dantzer utilise sa "prop 3.6" (p 36) ; on la montre au passage.

↳ Il existe une version lipschitzienne (voir Dantzer, p 48).

↳ S'il reste du temps : dire un mot du cpl. Application au th de Fourier-Plancherel.

↳ Dans le cpl : le corollaire implique $\|\mathcal{F}_2\| = \|\mathcal{F}\| = 1$ (avec $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$) mais on ne s'en sert pas puisque l'on montre le caractère isométrique, plus fort (et trivial).