Conique passant par cinq points

Leçons : 162, 171, 181.

Énoncés : • Prop : On se donne trois points non alignés A, B, C dans le plan affine $\mathbb{R}^2$.

↳ Les coniques sont les ensembles de points de coordonnées barycentriques (x, y, z) tq $P(x, y, z) = 0$, avec $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$ homogène de degré 2 non multiple de $X+Y+Z$ fixé.

↳ Si A, B, C appartiennent à la conique l'éq barycentrique se simplifie en $pYZ + qZX + rXY$ avec $p, q, r \in \mathbb{R}$ tq $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$.

↳ Dans ce dernier cas, la conique est propre ssi $pqr \neq 0$.

• Th : Si on considère cinq points distincts du plan affine, il existe une conique passant par ces cinq points. De plus :

↳ il y a unicité ssi les points sont 4 à 4 non alignés ;

↳ la conique est propre ssi les points sont 3 à 3 non alignés.

⊛ Prop :

• On rappelle qu'une conique est définie comme l'ensemble des points de coordonnées cartésiennes (u, v) tq $P(u, v)$ où $P \in \mathbb{R}[U, V]$ est un polynôme de degré 2. On mq le chgmt de coordonnées fait correspondre les polynômes de $\mathbb{R}[U, V]$ de degré ≤ 2 avec les polynômes homogènes de degré 2 (ou nuls) de $\mathbb{R}[X, Y, Z]$, puis qu'en particulier ceux de degré exactement 2 correspondent aux non multiples de $X+Y+Z$.

Prenons $P = \alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2 + \beta_1 U + \beta_2 V + \gamma$: le chgmt de coordonnées cartésiennes vers barycentriques se fait par $U = \frac{Y}{X+Y+Z}$, $V = \frac{Z}{X+Y+Z}$. Après multiplication par $(X+Y+Z)^2$ on obtient $\alpha_1 Y^2 + \alpha_2 YZ + \alpha_3 Z^2 + (\beta_1 Y + \beta_2 Z)(X+Y+Z) + \gamma(X+Y+Z)^2$, qui est bien homogène de degré 2 (ou nul).

Si réciproquement on prend un polynôme homogène de degré 2 de $\mathbb{R}[X, Y, Z]$ et qu'on effectue le chgmt de coordonnées $X = (1-U-V)$, $Y = U$, $Z = V$, on obtient bien un polynôme de $\mathbb{R}[U, V]$ de degré ≤ 2.

Si on prend le premier calcul fait, on voit que l'éq barycentrique est multiple de $X+Y+Z$ ssi $\alpha_1 Y^2 + \alpha_2 YZ + \alpha_3 Z^2$ l'est, ssi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ssi $\deg P < 2$.

• Dire que A est sur la conique revient à dire que le polynôme homogène annule $(1, 0, 0)$. Injecter ceci dans son expression mq le coef devant X^2 est nul. De même pour B, Y^2 ; C, Z^2.

Il ne reste donc que les termes croisés.

- L'équation cartésienne de $pYZ + qZX + rXY$ est $pUV + qV(1-U-V) + r(1-U-V)U$ $= -rU^2 + (p-q-r)UV - qV^2 + rU + qV$. La conique est propre ssi le déterminant

$$\begin{vmatrix} -r & (p-q-r)/2 & r/2 \\ (p-q-r)/2 & -q & q/2 \\ r/2 & q/2 & 0 \end{vmatrix}$$

est non nul. Or en faisant $\begin{cases} C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \end{cases}$ on obtient $\begin{vmatrix} -r/2 & (p-q)/2 & r/2 \\ (p-r)/2 & -q/2 & q/2 \\ r/2 & q/2 & 0 \end{vmatrix}$,

puis en faisant $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$ on arrive à $\begin{vmatrix} 0 & p/2 & r/2 \\ p/2 & 0 & q/2 \\ r/2 & q/2 & 0 \end{vmatrix}$. Par Sarrus le déterminant

est $\frac{pqr}{8} + \frac{pqr}{8} = \frac{pqr}{4}$. Ainsi la conique est propre ssi $pqr \neq 0$. $\square$

⊗ <u>Th.</u>

- Si quatre des cinq points sont alignés, la réunion de leur droite et d'une droite passant par le 5° point est une conique qui convient. Il n'y a pas unicité.
- On sq les points sont 4 à 4 non alignés. Il en existe trois parmi les cinq qui soient non alignés : on les note A, B, C (les deux autres étant D, E) et on se place dans le repère barycentrique qu'ils forment. Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées barycentriques de D et E. Les coniques passant par A, B, C, D, E sont celles d'équation $pYZ + qZX + rXY$ où $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est solution du système linéaire $\begin{cases} p\,y_1 z_1 + q\,z_1 x_1 + r\,x_1 y_1 = 0 \\ p\,y_2 z_2 + q\,z_2 x_2 + r\,x_2 y_2 = 0 \end{cases}$.

Le système est de rang ≤ 2. Par l'absurde sq il soit de rang ≤ 1. Les trois mineurs de taille 2 sont nuls: $d_1 = x_1 x_2 \begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$, $d_2 = y_1 y_2 \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$, $d_3 = z_1 z_2 \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$. Si $\begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$,

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$ ce qui signifie que A, D, E sont alignés. Par hypothèse B ne peut être aligné avec eux, donc $D, E \notin (AB)$, cad $z_1, z_2 \neq 0$. Vu que $d_3 = 0$ on a $\begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0$; là encore on réécrit $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$ cad C, D, E alignés. A, C, D, E sont alignés : c'est absurde. Donc

$\begin{vmatrix} z_1 & y_1 \\ z_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ et $x_1 x_2 = 0$. Si $x_1 = 0$ (cad $D \in (BC)$), on peut réécrire $d_2 = y_1 y_2 z_1 x_2 = 0$ et $d_3 = z_1 z_2 y_1 x_2 = 0$. B, C, D, E sont non alignés donc $x_2 \neq 0$; D est distinct de B et C donc $y_1, z_1 \neq 0$. On en déduit $y_2 = 0$ et $z_2 = 0$: $E = A$, absurde. De même on trouve une contradiction si $x_2 = 0$. Toutes les possibilités sont donc absurdes!

Finalement le rang du système est 2. Puisque la dimension est 3, l'ensemble des solutions forme une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Puisque multiplier une équation par un réel non nul ne modifie pas la conique, il y a bien une unique conique passant par A, B, C, D, E.

• Si trois des cinq points sont alignés, on les note A, B, D : D a pour coordonnées barycentriques $(x, y, 0)$ avec $x, y \neq 0$. La conique d'équation barycentrique $pYZ + qZX + rXY$ le contient cad $rxy = 0$ et $r = 0$. Ainsi $pqr = 0$ et la conique est dégénérée.
Réciproquement si la conique est dégénérée, $pqr = 0$; on peut sq $p = 0$. L'équation est alors $X(qZ + rY)$: un produit de deux équations de droites, et la conique est réunion de deux droites. Par principe des tiroirs au moins trois des cinq points sont alignés. $\square$

Complément : lien entre coordonnées cartésiennes et barycentriques.
Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de l'espace affine de dimension n, soit M un point de cet espace. Ses coordonnées cartésiennes sont $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{A_0A_i}$; ses coordonnées barycentriques sont $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $\sum_{i=0}^{n+1} x_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{0}$, et $\sum x_i \neq 0$ (définies à multiplication par un réel non nul près).
Si $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{A_0A_i}$, $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} u_i (\overrightarrow{A_0M} - \overrightarrow{A_iM})$ et $\left(1 - \sum_{i=1}^{n} u_i\right) \overrightarrow{A_0M} + \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{0}$:
on a donc $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i$ et $x_i = u_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
Si $\sum_{i=0}^{n+1} x_i \overrightarrow{A_iM} = \vec{0}$ avec $s = \sum_{i=0}^{n+1} x_i \neq 0$, $\vec{0} = \sum_{i=0}^{n+1} x_i (-\overrightarrow{A_0A_i} + \overrightarrow{A_0M}) = -\sum_{i=0}^{n+1} x_i \overrightarrow{A_0A_i} + s\overrightarrow{A_0M}$
donc $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{s} \overrightarrow{A_0A_i}$: $u_i = \frac{x_i}{s}$ pour $1 \leq i \leq n$. $\square$

Réf : • Eiden – Géométrie analytique classique : p 52.
• Audin – Géométrie : p 222 (rappels coniques).

↳ Trop long de tout faire. Admettre (ou dire un mot rapide) les points 1 et 3 de la prop.

↳ La déf de conique (celle que l'on choisit du moins) est rappelée au début de la preuve de la prop. Une conique d'équation $\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2 + \beta_1 U + \beta_2 V + \gamma$ est dite propre lorsque sa forme quadratique homogénéisée associée, $(\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2) + (\beta_1 U + \beta_2 V) W + \gamma W^2$ est non dégénérée ; cad lorsque le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2/2 & \beta_1/2 \\ \alpha_2/2 & \alpha_3 & \beta_2/2 \\ \beta_1/2 & \beta_2/2 & \gamma \end{vmatrix}$ est non nul.

↳ On rappelle la classification affine des coniques non vides (voir Audin) (rangées par la signature de $\alpha_1 U^2 + \alpha_2 UV + \alpha_3 V^2$) : ellipse, point ; parabole, droite, droites parallèles ; hyperbole, droites sécantes. Celles qui sont propres sont les ellipses, paraboles, hyperboles.

↳ On peut déterminer effectivement les p, q, r qui conviennent par pivot de Gauss.