20 Lemmes de Borel-Cantelli et applications

Lemme (Lemmes de Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite (quelconque) d'événements.*

1. *Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(\underline{\lim}\, A_n) = 0$, c'est à dire que presque sûrement, seul un nombre fini d'événements A_n se réalisent.*
2. *Supposons que les événements A_n soient deux à deux indépendants. Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(\underline{\lim}\, A_n) = 1$, c'est à dire presque sûrement, une infinité d'événements A_n se réalisent.*

Démonstration.
Montrons 1 :
On rappelle que $\underline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, en remarquant que pour tout n, $\underline{\lim}\, A_n \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ on a :

$$\forall n \geq 1,\ \mathbb{P}(\underline{\lim}\, A_n) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Or le terme de droite est le reste de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ supposée convergente, donc de limite nulle en l'infinie. Comme on a la majoration pour tout n on en déduit que $\mathbb{P}(\underline{\lim}\, A_k) = 0$.
Montrons 2 :
Supposons que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge. On va montrer que $\mathbb{P}(\{\underline{\lim}\, A_n\}^c) = 0$ c'est à dire que $\mathbb{P}(\overline{\lim}\, A_n^c) = 0$. Remarquons pour cela que les A_k sont indépendantes donc les A_k^c également. Ainsi, pour tout $n, N \geq 1$ tels que $n \leq N$ on a :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{N} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)}$$

En utilisant l'inégalité de convexité $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - x \leq e^{-x}$. Or la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ étant divergente, $\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k) \longrightarrow +\infty$ lorsque $N \to +\infty$ donc le terme de droite tend vers 0, et ce pour tout n. On en déduit que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k^c\right) = 0$, donc que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k^c\right) = 0$ (une réunion dénombrable d'ensemble négligeable est négligeable). On a bien $\mathbb{P}(\overline{\lim}\, A_n^c) = 0$ donc $\mathbb{P}(\underline{\lim}\, A_n) = 1$. □

Remarque (Nécessité de l'hypothèse d'indépendance dans 2.).
Si l'on omet l'hypothèse d'indépendance, on peut donner un contre-exemple immédiat à 2. : prenons un événement A de probabilité $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ et posons $A_n = A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge grossièrement, mais $\underline{\lim}\, A_n = A$ et donc $\mathbb{P}(\underline{\lim}\, A_n) < 1$.

20.1 Singe dactylographe

Application (singe dactylographe).
Prenons un singe immortel, et donnons lui une machine à écrire à N touches de ressources infinies. Supposons que le singe tape une infinité de caractères sur la machine, de façon indépendante et de telle façon que chaque caractères à la même probabilité d'être tapé. Prenons maintenant T notre texte préféré, alors le singe finira par taper le texte T et ce une infinité de fois.

Démonstration. On traduit les hypothèses de façon probabiliste : on a donc $(C_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d de caractères tapés (de même loi uniforme sur $A = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall c \in A$, $\mathbb{P}(C_n = c) = \frac{1}{N}$) et T un texte de longueur l c'est à dire que $T = (t_1, t_2, \ldots t_l) \in A^l$.
On introduit les événements $A_k = \{$le texte entre les caractères $kl + 1$ et $(k + 1)l$ est le texte $T\}$.
Les événements A_k sont indépendants car disjoint, et tous de même probabilité :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\forall\ 0 \leq i \leq l - 1,\ C_{kl+1+i} = t_i) = \frac{1}{N^l} > 0.$$

Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ diverge et par le point 2. des lemmes de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\underline{\lim}\, A_k) = 1$. c'est à dire que presque sûrement, une infinité d'événements A_k se réalisent, donc que le singe tape le texte T une infinité de fois. □

20.2 Convergence de suite

Application (Convergence de suite).
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite convergeant en probabilité vers X. Alors, il existe une sous-suite $\left(X_{\varphi(n)}\right)_n$ de $(X_n)_n$ telle que $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s} X$ lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. On rappelle que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left\{|X_k - X| > \frac{1}{k}\right\} = 0.$
On fabrique une suite strictement croissante $\varphi(n)$ par récurrence :
On choisit $\varphi(0)$ arbitrairement, supposons que $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n - 1)$ soient déjà construits, alors comme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ on peut choisir un entier $k > \varphi(n - 1)$ tel que

$$\mathbb{P}\left\{|X_k - X| > \frac{1}{k}\right\} \leq \frac{1}{n^2}$$

et on note $\varphi(n)$ cet entier.
On note $A_n = \{|X_{\varphi(n)} - X| > \frac{1}{k}\}$ et on a par construction $\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \mathbb{P}(A_n) \leq \sum \frac{1}{n^2}$.
La série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente, et par le premier lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\underline{\lim}\, A_n) = 0$.
C'est à dire que pour presque tout ω, il n'existe qu'un nombre fini d'événements A_n qui se réalisent, et donc qu'il existe $N(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N(\omega)$, $|X_{\varphi(n)}(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{n}$.
Donc pour presque tout ω, $X_{\varphi(n)}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)$, donc $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{p.s} X$. □

Remarque. Classique, le lemme en lui même est très court à montrer.

Références. APPEL, *Probabilités pour les non-probabilistes* Pages 117 à 119.