236

Illustrer par quelques exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

E est un espace vectoriel de Banach sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), I intervalle de $\mathbb{R}$

I. Méthodes de calculs directs

1) Théorèmes d'intégration sur un segment [Gou]

Thm 1 : Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Alors f admet une primitive sur $[a,b]$ et toute primitive F de f vérifie

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = F(a) + \int_a^x f.$$

Méth 2 : Lorsque cela est possible, on détermine une primitive de l'intégrande.

Ex 3 : 1) $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$

2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(t)\,dt = -1$

3) $\int_0^x t e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}-1}{2}$

Thm 4 (Intégration par parties) Soient $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Ex 5 : $\int_0^1 x e^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1$

Thm 6 (Changement de variable) Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to E$ une application continue par morceaux telle que $\varphi([a,b]) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

[BP] p25

Ex 7 : $\int_0^a \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \arctan(\operatorname{sh}(a))$

2) Extension aux intégrales généralisées

Méth 8 : On se ramène au calcul d'intégrale sur un segment puis on passe à la limite

Rem 9 : Pour conserver la nature de l'intégrale on effectue un changement de variable $\mathcal{C}^1$ et bijectif

Ex 10 :

1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \to +\infty} \operatorname{Arctan}(A) = \frac{\pi}{2}$.

2) $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+\ln(u)^2)} = \frac{\pi}{2}$

3) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente.

3) Exemples de calculs de primitives [Gou]

Méth 11 : Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. On calcule $\int F$ en décomposant F en éléments simples sur $\mathbb{R}$. Les éléments simples sont de deux formes possibles.

1) $\frac{1}{(x-a)^h}$: $\int \frac{dx}{(x-a)^h} = \begin{cases} \frac{1}{(1-h)(x-a)^{h-1}} + k & \text{si } h \neq 1 \\ \ln|x-a| + k & \text{si } h = 1 \end{cases}$

2) $\frac{ax+b}{(x-a)^h}$: on la met sous la forme $\frac{2\alpha(x-p)}{((x-p)^2+q^2)^h} + \frac{\beta}{((x-p)^2+q^2)^h}$

Le deuxième terme se met sous la forme $\frac{1}{1+u^2}$ par changement de variable

Ex 12 : $\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k$

Méth 13 : On veut calculer les primitives de la forme $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

1) Si m ou n est impair, par exemple $n = 2p+1$,

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \sin^m(x)(1-\sin^2(x))^p \cos(x)\,dx$$
$$= \int t^m (1-t^2)^p\,dt$$

2) si m et n sont pairs, on linéarise $\sin^m x \cos^n x$ en l'exprimant comme combinaison linéaire de fonctions de la forme $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$

Ex 14 : $\cos^4(x) = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}$

Donc $\int \cos^4(x)\,dx = \frac{\sin(4x)}{32} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{3}{8}x + k$.

Méth 18 : On veut calculer les primitives de la forme $\int P(x)e^{rx}dx$, $P \in \mathbb{C}[X]$, $r \in \mathbb{C}$. Les primitives sont de la forme $Q(x)e^{rx} + k$, Q étant un polynôme de même degré que P.

Ex 19 :

3) Intégrales multiples [BP]

Thm 20 (Fubini-Tonelli) : Soient X et Y des parties de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f : X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ une fonction mesurable.
Alors $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\lambda(x)$ et $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\lambda(y)$ sont définies presque partout et mesurables, et

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\lambda(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\lambda(y)\right) d\lambda(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\lambda(x)\right) d\lambda(y).$$

Thm 21 (Fubini-Lebesgue) : Soient X et Y deux partie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f : X\times Y \to \mathbb{C}$ mesurable telle que

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\,d\lambda y\right) d\lambda(x) < +\infty \text{ ou } \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\,d\lambda(y)\right) d\lambda(x) < +\infty$$

Alors $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,d\lambda(x)$ et $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,d\lambda(y)$ sont intégrables et

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,d\lambda(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\lambda(y)\right) d\lambda(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\lambda(x)\right) d\lambda(y)$$

Ex 22 :
1) Le théorème de Fubini ne s'applique pas à $\int_{[0,1]} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,d(x,y)$.
2) $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-x^2}}{1+y^2}\,d(x,y) = \sqrt{\pi}\,\pi$.

Thm 23 (Changement de variables) Soient Δ et D des ouverts de $\mathbb{R}^d$, $\varphi : \Delta \to D$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On note $\lambda_D = \mathbb{1}_D \lambda$. Les trois assertions suivantes équivalentes sont vérifiées
(a) $\lambda_D = \varphi(|J_\varphi| \cdot \lambda_D)$
(b) Pour toute fonction mesurable $f : D \to \mathbb{R}_+$,

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f(\varphi(u))\,|J_\varphi|(u)\,du \leq +\infty$$

(c) Pour toute fonction mesurable $f : D \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
f est λ_D-intégrable sur D si et seulement si $(f\circ\varphi)|J_\varphi|$ est λ_D-intégrable sur Δ et dans ce cas,

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f(\varphi(u))\,|J_\varphi|(u)\,du.$$

Ex 24 : $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$, $(r,\theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $J_\varphi(r) = r > 0$

Ex 25 : Par changement de variables, on montre que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

Déf 26 : Pour tout $x>0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Γ est la fonction Gamma d'Euler

Prop 27 :
1) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Déf 28 : Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$
B ainsi définie est la fonction Beta d'Euler

Prop 29 : Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

App 30 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $B_n^{(r)} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2+\dots+x_n^2 \leq r^2\}$. Alors $\lambda(B_n(1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

Ex 31 : Soient $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}_S = \{x \in \mathbb{R}^n, q_S(x) \leq 1\}$ où q_S est la forme quadratique associée à S.
Alors $\lambda(\mathcal{E}_S) = \det(S)^{-1/2}\lambda(B_n)$.

II. Autres techniques

1) Equations [Gou]

* TCD TC TD.

Relation de récurrence

Ex 32 (Intégrales de Wallis) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

$\forall n \geq 2$, $n I_n = (n-1) I_{n-2}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots}{2p(2p-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 1}$

App 33 (Formule de Stirling)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Equation différentielle

Thm 34 (Dérivation sous le signe intégrale)

[Ber]

Ex 35 : $f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} e^{it\xi} dt$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\xi y$. Donc $f(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/2}$

Ex 36 : Intégrale de Dirichlet par la transformée de Laplace

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ p \longmapsto \int_0^{+\infty} \exp(-pt) \frac{\sin t}{t} dt \end{cases}$$

vérifie $F'(p) = -\frac{1}{1+p^2}$

2) Théorème des résidus [Tau]

Def 37 : On appelle chemin toute application $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et C^1 par morceaux. γ est un lacet si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Def 38 : Soient $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin et f une fonction continue sur γ. L'intégrale de f sur γ, notée $\int_\gamma f(z)dz$ est définie par

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

Thm-déf 39 : Soient $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet, $U = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma$.
Pour $z \in U$, on pose

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,dt$$

L'application $\begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z) \end{array}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U, nulle sur la composante non bornée

Thm 40 (Formule de Cauchy pour un convexe) : Soient γ un lacet dans un convexe ouvert Ω de $\mathbb{C}$, $z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}\gamma$ et $f \in H(\Omega)$.
Alors $\mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

Ex 41 :

Def 42 : Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$ et $a \in U$ un pôle d'ordre m de f. La partie principale de f en a est

$$P(z) = \sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-a)^{-k}$$

On dit que a_{-1} est le résidu de f en a et on le note $a_{-1} = \mathrm{Res}(f,a)$

Thm 43 (des résidus) Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a_1, \dots, a_n$ des points deux à deux distincts de U et $f \in H(U \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$.
On suppose que les a_k sont les pôles de f. Si γ est un chemin fermé dans U dont l'image ne contient aucun a_i,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f, a_k)$$

Ex 44 : $f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t}}{1+t^2} dt = \pi e^{-|\xi|}$.

Références :
[Ber]
[BP]
[Gou]
[Tau]