235. Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales

Exemple 1. $f_n(x) = x^n$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^-} f_n(x) \neq \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

I. Suite et séries de fonctions

Cadre : E espace vectoriel normé, X partie non vide d'un espace vectoriel de dimension finie F.

1. Convergence uniforme

Définition 2 (Convergence uniforme)**.** [Amr11, p.141] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies (\forall x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon).$$

Remarque 3. [Amr11, p.143]

1. Cette définition est valable pour les séries vues comme suites de fonctions.
2. On peut munir l'espace vectoriel $B(X,E)$ d'applications bornées de X dans E en posant, pour tout $f \in B(X,E)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$. Cette norme est appelée la norme de la convergence uniforme.

Proposition 4. Si la suite (f_n) converge uniformément sur X vers f, alors, elle converge simplement sur X vers f.

Remarque 5. [Amr11, p.169] La réciproque est fausse : $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 6 (Critère de convergence uniforme d'une série)**.** Soit $\sum f_n$ une série de fonctions sur I. $\sum f_n$ converge uniformément sur I si, et seulement si $\sum f_n$ converge simplement sur I et la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Définition 7 (Convergence normale)**.** On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur X lorsque
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in B(X,E)$,
- la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Proposition 8. Si la série converge normalement sur X, alors elle converge absolument et uniformément sur X.

2. Interversion limite-limite

Continuité

Théorème 9. [Amr11, p.145] Soit $a \in X$.
Soit (f_n) une suite d'applications de X dans E continues en a qui converge uniformément vers f. Alors f est continue en a.
Si (f_n) est continue sur X, alors f est continue sur X

Remarque 10. La convergence uniforme est nécessaire pour assurer la continuité de f.

Application 11. [Amr11, p.161] Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Alors la suite $(f_n \circ f_n)$ converge simplement vers $f \circ f$.

Exemple 12. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur $[a,b]$ et k-lipschitziennes convergeant simplement vers une fonction f. Alors la suite (f_n) converge uniformément vers f.

Théorème 13 (Double limite)**.** [Amr11, p.156] Soit (f_n) une suite d'applications de X dans E, convergeant uniformément sur X vers une application f, et soit $a \in \overline{X}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la limite b_n de $(f_n(x))$ lorsque $x \to a$ existe. Si E est complet,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Corollaire 14 (Double limite pour une série)**.** [Amr11, p.195] Soit $a \in \overline{X}$ et soit $\sum f_n$ une série de fonctions de X dans E On suppose que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite ℓ_n au point a
2. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X

Alors

1. la série $\sum \ell_n$ converge dans E

2. la fonction somme S admet une limite en a, et

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Exemple 15. Sur $\mathbb{R}$: $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$. $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Dérivation

Théorème 16. [Amr11, p.148] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite d'applications dérivables de I dans E convergeant simplement vers f. Pour que f soit dérivable, il faut et il suffit que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur I. On a alors, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Remarque 17. Faux sans l'hypothèse de convergence uniforme sur la suite (f_n').

Exemple 18. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

Théorème 19 (Dérivation terme à terme)**.** [Amr11, p.197] Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de I dans E. On suppose que $\sum f_n$ est simplement convergente et que la série $\sum f_n'$ est uniformément convergente sur I. Alors la fonction somme S est dérivable sur I et

$$\forall x \in I,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

Exemple 20.
1. $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1,+\infty[$ et infiniment dérivable.

Application 21 (Formule sommatoire de Poisson)**.** [Gou08, p.272] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ lorsque $|x| \to +\infty$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\to\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\to\mathbb{Z}} f^*(n)e^{2in\pi x} \quad \text{où } \forall n \in \mathbb{Z},\ f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$$

II. Théorie de l'intégration

Cadre : on se place dans un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ.

1. Interversion limite-intégrale

Lemme 22 (Approximation)**.** Toute fonction mesurable positive $(X, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives.

Lemme 23 (Fatou)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors,

$$\int_X \liminf f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Exemple 24. Soit une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge μ-p.p vers f. On suppose que $\sup_{n\geqslant 0} \int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Alors $f \in L^1(X)$.

Application 25. Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ de dérivée bornée. Alors $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0)$.

Théorème 26 (Beppo Levi ou convergence monotone)**.** [BP18, p.120] Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors, $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$.

Théorème 27 (Convergence dominée)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1(X)$. On suppose que
1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement μ-p.p. vers une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$,
2. il existe une fonction $g \in L^1(X)$ telle que $|f_n| \leqslant g$ μ-p.p.

Alors, $f \in L^1(X)$ et $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Exemple 28. L'hypothèse de domination est fondamentale : $\int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 29 (Intégration terme à terme sur un intervalle)**.** [Amr11, p.200] Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(I)$ telle que la série $\sum \|f_n\|_1$ converge. Alors la série $\sum f_n$ converge presque partout sur I, sa somme S est dans $L^1(I)$. En particulier, $\int_I S(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$

Théorème 30 (Intégration terme à terme sur un segment)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur un intervalle compact $[a,b]$, à valeurs dans un espace vectoriel normé complet E. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors
1. sa somme $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$,
2. la série de terme général $u_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, et $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemple 31. [Amr11, p.215] $\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

2. Application aux intégrales à paramètres

Théorème 32 (Continuité sous le signe intégrale)**.** [BP18, p.140] Soit $f : X \times T \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $x_\infty \in X$. On suppose que

1. pour tout $x \in X$, $t \longmapsto f(x,t)$ mesurable de $(T, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$
2. μ- p.p., $x \longmapsto f(x,t)$ est continue en x_∞,
3. il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que pour tout $x \in X$, $|f(x,t)| \leqslant g(t)$ μ-p.p.

Alors la fonction $F : x \longmapsto \int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ est continue.

Théorème 33 (Dérivation sous le signe intégrale)**.** Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \times T \longrightarrow \mathbb{K}$ et $x_\infty \in I$. On suppose que

1. μ-p.p., $\frac{\partial f}{\partial x}(x_\infty, t)$ existe
2. Pour tout compact K de I, il existe $g_K \in L^1(\mathbb{R})$ telle que pour presque tout $t \in T$, pour tout $x \in K$, $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leqslant g_K(t)$.

Alors $F(x) = \int_T f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ est définie en tout point $x \in I$ et dérivable en x_∞, et $F'(x_\infty) = \int_T \frac{\partial f}{\partial x}(x_\infty, t)\,\mathrm{d}\mu(t)$.

Application 34 (Intégrale de Dirichlet)**.** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Théorème 35 (Holomorphie sous le signe intégrale)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

1. Pour presque tout $t \in T$, $z \longmapsto f(t,z)$ est holomorphe dans U
2. Pour tout compact K de U, il existe $g_K \in L^1(T)$ tel pour presque tout $t \in T$, pour tout $z \in K$, $|f(z,t)| \leqslant g_K(t)$.

Alors $F : z \longrightarrow \int_T f(z,t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ est holomorphe, et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall z \in \Omega,\ F^{(k)}(z) = \int_T \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z,t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Exemple 36. La fonction $\Gamma : z \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

3. Interversion intégrale-intégrale

Théorème 37 (Fubini Tonelli)**.** [BP18, p.235] Soient $f : (X, Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable, μ et ν deux mesures σ-finies, respectivement sur $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$.

1. Les fonctions $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$-mesurables.
2. $\int_{X \times Y} f\,\mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\nu(y)$

Théorème 38 (Fubini)**.** Soit $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors

1. $\begin{cases} \mu - \text{p.p},\ y \longmapsto f(x,y) \in L^1(\Omega_1) \\ \nu - \text{p.p},\ x \longmapsto f(x,y) \in L^1(\Omega_2) \end{cases}$
2. $x \longmapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \longmapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(x)$ sont définies μ et ν-p.p respectivement.
3. $\int_{X \times Y} f\,\mathrm{d}\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\nu(y)$

Produit de convolution

Proposition-Définition 39. Soient $f \in L^1$ et $g \in L^p$ avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. On pose $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$. $f * g \in L^p$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

Développements

1. Théorème de Riesz-Fischer
2. Formule sommatoire de Poisson.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Les maths en tête, Analyse.* Ellipses, 2008.

[Amr11] Mohammed El Amrani. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions.* Ellipses, 2011.

[BP18] Marc Briane et Gilles Pagès. *Analyse, Théorie de l'intégration : Convolution et transformée de Fourier.* De Boeck, 2018.