Projection sur un convexe fermé et théorème de représentation de Riesz.

Recasage : 205, 213, 208, 253.

Références : Haim Brezis, Analyse fonctionnelle p79-82, Hirsch-Lacombe p91...

Théorème (projection) : soient H un espace de Hilbert et C une partie non vide convexe et fermée de H. Alors $\forall x \in H, \exists! y \in C$ tel que $\|y-x\| = d(x,C)$.
On le note $y = p_C(x)$ et on a la caractérisation suivante :

$$y = p_C(x) \iff y \in C \text{ et } \forall c \in C,\ \mathrm{Re}(\langle x-y, c-y \rangle) \leq 0.$$

Soit $x \in H$ et posons $d := d(x,C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

Existence : on considère une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que $d_n := \|x - z_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} d$
(par exemple une suite minimisante telle que $\|x - z_n\|^2 \leq d^2 + 2^{-n}$)
Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \|z_p - z_q\|^2 &= \|(z_p - x) - (z_q - x)\|^2 \\ &= 2(d_p^2 + d_q^2) - \|(z_p - x) + (z_q - x)\|^2 \quad \text{par identité du parallélogramme} \\ &= 2(d_p^2 + d_q^2) - 4 \Big\| \underbrace{\frac{z_p + z_q}{2}}_{\in C \text{ car } C \text{ est convexe}} - x \Big\|^2 \\ &\leq 2(d_p^2 + d_q^2) - 4d^2 \xrightarrow[p,q \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

De plus C est un s.e.v fermé de H qui est complet donc C est complet.
Donc $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans C qui est complet donc converge vers un point $p \in C$ qui vérifie alors $\|x - p\| = d$ par unicité de la limite.

Unicité : si p_1 et p_2 réalisent la projection, alors en posant $p = \frac{p_1 + p_2}{2} \in C$, on a :

$$d^2 \leq \|x - p\|^2 = 2\left(\left\| \frac{x - p_1}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x - p_2}{2} \right\|^2 \right) - \left\| \frac{p_1 - p_2}{2} \right\|^2 = d^2 - \left\| \frac{p_1 - p_2}{2} \right\|^2$$

par identité du parallélogramme.

d'où $\left\| \frac{p_1 - p_2}{2} \right\| = 0$ et $p_1 = p_2$.

__Caractérisation:__ soit $y \in C$, et $c \in C$, par convexité de C, $(1-t)y + tc \in C$ $\forall t \in [0,1]$ et donc,

$$\forall c \in C, \forall t \in]0,1], \|x - ((1-t)y + tc)\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \forall c \in C, \forall t \in]0,1], \|x - y - t(c-y)\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \forall c \in C, \forall t \in]0,1], \|x-y\|^2 - 2t\mathrm{Re}(\langle x-y, c-y\rangle) + t^2\|c-y\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \forall c \in C, \forall t \in]0,1], -2\mathrm{Re}(\langle x-y, c-y\rangle) + t\|c-y\|^2 \geq 0$$

Si $y = p_C(x)$ on trouve $\mathrm{Re}(\langle x - p_C(x), c - p_C(x)\rangle) \leq 0$ en faisant $t \to 0$.

Réciproquement, si y satisfait $\mathrm{Re}(\langle x-y, c-y\rangle) \leq 0$ alors on peut remonter dans les équivalences et prendre $c = p_C(x)$ et $t = 1$ pour obtenir $d = \|x - p_C(x)\| \geq \|x-y\|$ d'où $y = p_C(x)$. □

__Corollaire:__ si F est un s.e.v fermé de H espace de Hilbert, alors $H = F \oplus F^\perp$.

Si $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'application $z' \longmapsto z = y + \bar{\lambda} z'$ est une bijection de F sur F.

La caractérisation du projeté peut donc se réécrire :

$$y \in F \text{ et } \forall z \in F, \mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0 \Leftrightarrow y \in F \text{ et } \forall z' \in F, \forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \mathrm{Re}(\langle x-y, \bar{\lambda} z'\rangle) \leq 0$$

$$\mathrm{Re}(\langle x-y, \bar{\lambda} z'\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda \langle x-y, z'\rangle)$$

En prenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $\lambda \mathrm{Re}(\langle x-y, z'\rangle) \leq 0$ d'où $\mathrm{Re}(\langle x-y, z'\rangle) = 0$

En prenant $\lambda \in i\mathbb{R}^*$, on a $\lambda = i\lambda'$ avec $\lambda' \in \mathbb{R}^*$ et $\underbrace{\mathrm{Re}(\lambda \langle x-y, z'\rangle) = -\lambda' \mathrm{Im}(\langle x-y, z'\rangle)}_{\leq 0}$

d'où $\mathrm{Im}(\langle x-y, z'\rangle) = 0$ et $\langle x-y, z'\rangle = 0$

d'où $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$

Bref, $y = p_F(x) \Leftrightarrow y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Si $x \in H$, $x = p_F(x) + (x - p_F(x)) \in F + F^\perp$ et clairement $F \cap F^\perp = \{0\}$

donc $H = F \oplus F^\perp$. □

~~Th~~éorème (Riesz) : Soit H un espace de Hilbert et une application $f \in H'$, alors il existe un unique $y \in H$ tel que $f = \langle \cdot, y \rangle$.
De plus, l'application $f \in H' \mapsto y \in H$ est une isométrie i.e $\|f\|_{H'} = \|y\|_H$.

Existence : si $f \equiv 0$, $y = 0$ convient. Sinon, $\operatorname{Ker} f \neq H$ est un s.e.v fermé de H donc d'après le corollaire, on a la décomposition $H = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp$.
$f_{|(\operatorname{Ker} f)^\perp}$ est linéaire, injective et non nulle donc $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan (strict) de H donc $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ est de dimension 1. On choisit donc $e \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ tel que $f(e) = 1$. Pour $x = \lambda e$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$f(x) = \lambda f(e) = \lambda = \langle \lambda e, \frac{e}{\|e\|^2} \rangle = \langle x, \frac{e}{\|e\|^2} \rangle$$

Si $x \in \operatorname{Ker} f$, $f(x) = 0 = \langle x, \frac{e}{\|e\|^2} \rangle$ car $\frac{e}{\|e\|^2} \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$

Avec la décomposition $H = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp$ on en déduit $f = \langle \cdot, \frac{e}{\|e\|^2} \rangle$.

Unicité : si y et y' conviennent, on a $\forall x \in H$, $\langle x, y - y' \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, y' \rangle$
$= f(x) - f(x) = 0$

Donc $y - y' \in H^\perp = \{0\}$ d'où $y = y'$.

Isométrie : par Cauchy-Schwarz, $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
donc $\|f\|_{H'} \leq \|y\|$

et c'est atteint en $x = e$. $\square$

Illustration :