

Théorème de Bohr-Mollerup

Legons: 229, 253, 265

Référence: Rambaldi, Eléments d'analyse réelle p 366

Théorème: Toute fonction $f:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ logarithmiquement convexe vérifiant $f(1) = 1$ et solution de l'équation fonctionnelle $f(x+1) = x f(x) \forall x > 0$ est égale à Γ .

Dém: Lemme: Γ est log-convexe, $\Gamma(1) = 1$ et $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

• $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$

p 364

• $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \lim_{E \rightarrow +\infty} \int_E^{1/E} t^x e^{-t} dt$
 $= \lim_{E \rightarrow +\infty} [-t^x e^{-t}]_E^{1/E} + \int_E^{1/E} x t^{x-1} e^{-t} dt$
 $= x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$

• Comme Γ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, $\ln \circ \Gamma$ est deux fois dérivable et on peut utiliser la caractérisation des fonctions convexes. Soit $x > 0$.

p 366

$(\ln \circ \Gamma)''(x) = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \right)'(x) = \frac{\Gamma''(x) \Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}$

Or $\Gamma'(x)^2 = \left(\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right)^2$
 $= \left(\underbrace{\int_0^{+\infty} \ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} dt}_{\in L^2} \underbrace{\left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \right)}_{\in L^2} dt \right)^2$

Cauchy
Schwarz $\leq \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)$
 $= \Gamma''(x) \Gamma(x)$

Dans $\forall x > 0$, $(\ln \Gamma)'(x) > 0$ donc $\ln \Gamma$ est convexe. $\square$

Lemme: pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$

On utilise l'équivalent $\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}$ $x \rightarrow \infty$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} = \dots = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

$$\text{Or } \Gamma(x+n+1) \sim \sqrt{2\pi} (x+n+1)^{x+n+\frac{1}{2}} e^{-(x+n+1)}$$

$$\text{et par Stirling, } n! n^x \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} n^x$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{\Gamma(x+n+1)}{n! n^x} &\sim \frac{\left(\frac{x+n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{x+n+1}{n}\right)^x e^{-x-1}}{\left(1+\frac{x+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \left(1+\frac{x+1}{n}\right)^x e^{-x-1}} \\ &\sim \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{x+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}_{\sim e^{x+1}} \underbrace{\left(1+\frac{x+1}{n}\right)^x}_{\sim 1}} \\ &\sim 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1) n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n) n! n^x} \sim \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

D'après l'équation fonctionnelle, il suffit de vérifier que $f = \Gamma$ sur $[0, 1]$.

Posons $g = \ln \circ f$ convexe. D'après l'inégalité des trois pentes, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$m+1 \leq m+x+1 \leq m+2$$

p 366

$$\frac{g(m+1) - g(m)}{m+1 - m} \leq \frac{g(m+1+x) - g(m+1)}{m+1+x - (m+1)} \leq \frac{g(m+2) - g(m+1)}{m+2 - (m+1)}$$

Or $g(m+1) = \ln(f(m+1)) = \ln(mf(m)) = \ln m + g(m)$, donc

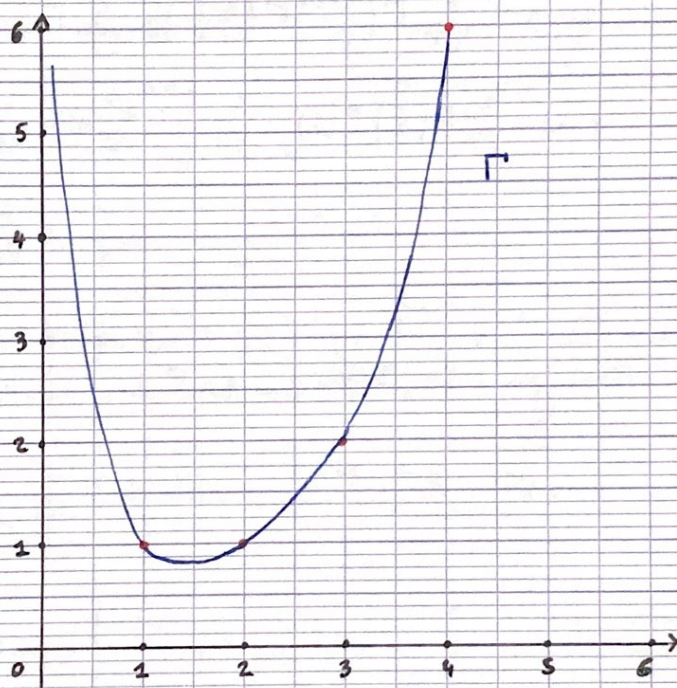
$$\ln m \leq \frac{1}{x} \ln \left(\frac{f(m+1+x)}{f(m+1)} \right) \leq \ln(m+1)$$

soit encore $n^x \leq \frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \leq (n+1)^x$ donc d'après l'équation fonctionnelle,

$$n^x \leq \frac{(n+x)(n-1+x) \cdots (1+x)x f(x)}{n! f(1)} \leq (n+1)^x$$

d'où $\frac{n! n^x}{(n+x) \cdots (1+x)x} \leq f(x) \leq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \frac{n! n^x}{(n+x) \cdots (1+x)x}$

donc en passant à la limite ($n \rightarrow \infty$), $\Gamma(x) \leq f(x) \leq \Gamma(x)$. $\square$



Ce tracé approximatif de Γ utilisant ses valeurs sur les entiers et sa convexité n'est en fait pas très éloigné de la courbe exacte de Γ : c'est une conséquence du théorème de Bohr-Mollerup.

Application :
(Formule de Legendre)

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

$$\text{Soit } \varphi: x \mapsto \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

• $x \mapsto 2^{x-1}$, $x \mapsto \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$ et $x \mapsto \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ sont log-convexes donc la fonction φ est log-convexe.

• Si $x > 0$,

$$\varphi(x+1) = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) = x \varphi(x)$$

• $\varphi(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$= 1.$$

Ainsi par Bohr-Mollerup, $\varphi = \Gamma$.

Bonus: d'autres méthodes

$$\bullet \forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Rombaldi p 364

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0, n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$

Si $t > 0$,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &= \exp\left(n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp(-t + o(1)) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall t > 0, f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t^{x-1} e^{-t}$.

Par ailleurs, $\forall t > 0, \forall n > t, t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq t^{x-1} e^{-t}$ qui est intégrable.
D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x).$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{t}{n}\right)^{x-1}}_{u^{x-1}} \underbrace{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}_{(1-u)^n} n du \\ &= n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{I_n(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du = \left[\frac{u^x (1-u)^{n+1}}{x} \right]_{u=0}^1 - \int_0^1 \frac{-u^x n (1-u)^{n-1}}{x} du \\ &= \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) \\ &= \frac{n(n-1)\dots 1}{x(x+1)\dots(x+n-1)} I_0(x+n) \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int_0^1 u^{x+n-1} du \\ &= \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \end{aligned}$$

Ainsi $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$

- Γ est log convexe i.e. $\Gamma(\theta x + (1-\theta)y) \leq \Gamma(x)^\theta \Gamma(y)^{1-\theta}$

$$\Gamma(\theta x + (1-\theta)y) = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{\theta x + (1-\theta)y}}_{(t^x)^\theta (t^y)^{1-\theta}} e^{-t} \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(t)}_{(t^x)^\theta} \underbrace{g(t)}_{(t^y)^{1-\theta}} d\mu(t)$$

mesure $\gamma, 0$

$$\frac{1}{p} = \theta, \quad \frac{1}{q} = 1-\theta$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^{+\infty} f(t)^{\theta p} d\mu(t) \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_0^{+\infty} g(t)^{(1-\theta)q} d\mu(t) \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\theta x} e^{-\theta t} \frac{dt}{t} \right)^{\theta} \left(\int_0^{+\infty} t^{(1-\theta)y} e^{-(1-\theta)t} \frac{dt}{t} \right)^{1-\theta} \\ &= \Gamma(x)^\theta \Gamma(y)^{1-\theta} \end{aligned}$$

- Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0$,
 $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (lnt)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$

Romaldi p 365

$f: (x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est C^∞ sur $]0, +\infty[^2$ avec $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (lnt)^k t^{x-1} e^{-t}. \text{ Si } [a, b] \subset]0, +\infty[\text{ et } x \in [a, b],$$

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| = |lnt|^k t^{x-1} e^{-t} \leq g_k(t) = \begin{cases} |lnt|^k t^{a-1} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ |lnt|^k t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

où les g_k sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

En effet, $\lim_{t \rightarrow 0} |lnt|^k t^{a/2} = 0$ donc pour $t > 0$ assez petit, $|g_k(t)| \leq t^{a/2-1}$

qui est intégrable sur $]0, 1[$. Et $\lim_{t \rightarrow \infty} |lnt|^k t^{b-1} e^{-t/2} = 0$ donc pour t

assez grand, $|g_k(t)| \leq e^{-t/2}$ qui est intégrable sur $]1, +\infty[$.

Par dérivation sous le signe intégral, on a le résultat.