160 | Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

[Rom21] Cadre : On se place dans un espace euclidien E, *i.e.* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie munie d'un produit scalaire.

I Génératités sur les endomorphismes adjoints et normaux

1 Généralités sur les endomorphismes adjoints

Lemme 1. Pour toute forme linéaire ℓ sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E,\ \ell(x) = \langle x, a \rangle$.

Théorème-Définition 2. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

u^* est appelé l'endomorphisme adjoint de E.

Proposition 3. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$Mat_{\mathcal{B}}(u^*) =^t Mat_{\mathcal{B}}(u).$$

Corollaire 4. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u) = \det(u^*)$.

Proposition 5. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$;
2. $(u^*)^* = u$;
3. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$;
4. Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$;
5. $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp$;
6. $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$;
7. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

2 Endomorphismes normaux

Définition et exemples

Définition 6. $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Proposition 7. $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si, et seulement si sa matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans ne base orthonormée vérifie ${}^tAA = A^tA$.

Exemple 8.

1. $u^* = u$: c'est un endomorphisme symétrique ;
2. $u^* = -u$: c'est un endomorphisme antisymétrique ;
3. $u^* = u^{-1}$: c'est un endomorphisme orthogonal ;
4. $u = \lambda v$ avec v un endomorphisme orthogonal : c'est une similitude.

Nous étudierons de plus près certains de ces exemples.

Réduction

Lemme 9. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Lemme 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe des sous-espaces vectoriels de E, $P_1, \dots, P_r$ de dimension égale à 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que $E = \bigoplus_{j=1}^r P_j$.

Lemme 11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal dans un espace euclidien de dimension 2. Si u a une valeur propre réelle, il est alors diagonalisable dans une base orthonormée, sinon la matrice de u dans cette base est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

Théorème-Définition 12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :

$$\Delta = \begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où D_p est une matrice diagonale d'ordre p et $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$ avec $a_k \neq 0$ et $p + 2r = n$.

II Endomorphismes orthogonaux

1 Définitions et propriétés

Définition 13. Une isométrie (ou endomorphisme orthogonal) de E est un endomorphisme u tel que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux

Proposition 14. $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si, et seulement si

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|.$$

Remarque 15. Les seules valeurs propres réelles possible de $u \in \mathcal{O}(E)$ sont -1 et 1.

Proposition 16. $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

Définition 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice orthogonale si ${}^tAA = A^tA = I_n$. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices

Proposition 18. $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si, et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

Il existe un isomorphisme de groupes entre $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 19. Pour tout $u \in \mathcal{O}(E)$, $\det(u) = \det(u^*)$.

Proposition 20. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est une isométrie si, et seulement si elle transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.

Proposition 21. $\mathcal{O}(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 22. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u.

Définition 23. $u \in \mathcal{O}(E)$ est un automorphisme orthogonal direct (resp. indirect) si $\det(u) = 1$ (resp. $\det(u) = -1$). On note $\mathcal{O}^+(E)$ (resp. $\mathcal{O}^-(E)$) l'ensemble de tels endomorphismes.

Définition 24. $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale directe (resp. indirecte) si $\det A = 1$ (resp. $\det A = -1$).

Il existe un isomorphisme de groupes entre $\mathcal{O}^+(E)$ (resp. $\mathcal{O}^-(E)$) et ${}^+_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{O}_n^{++}(\mathbb{R})$).

Proposition 25. $\mathcal{O}^+(E)$ est un sous-groupe distingué d'indice 2 de $\mathcal{O}(E)$.

2 Groupe orthogonal en dimensions 2 et 3

[Gri15] E est un espace euclidien de dimension 2 ou 3.

Proposition 26. Soit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Alors :

1. soit $A \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et A est une rotation d'angle θ et de centre O.
2. soit $A \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ et A est une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\theta/2$.

Proposition 27. Soient $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

1. $\varepsilon = 1$ si, et seulement si $A \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$;
2. $\varepsilon = -1$ si, et seulement si $A \in \mathcal{O}_3^-(\mathbb{R})$.

Proposition 28. Soit $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

1. Si $\det(A) = 1$, 1 est valeur propre d'ordre 1 ou 3, $\dim(E_1) = 1$, $E_1^\perp$ est invariant par u et $u_{E_1^\perp}$ est une rotation.
2. Si $\det(A) = -1$, -1 est valeur propre d'ordre 1 ou 3 et $\dim(E_{-1}) = 1$, $E_{-1}^\perp$ est invariant par u et $u_{E_{-1}^\perp}$ est une rotation.

Proposition 29. Soit $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_3\}$.

1. Si $\det A = 1$, A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour de l'axe E_1.
2. Si $\det A = -1$, A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour de l'axe E_{-1} suivie de la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^\perp$.

3 Cas général

On suppose que $\dim(E) = n \geqslant 2$.

Théorème 30. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans la quelle la matrice de u s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & R_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

avec pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$ et $\theta_k \in]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$.

III Endomorphismes auto-adjoints

1 Définitions et propriétés

Définition 31. $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$ *i.e.*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques.

Définition 32. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tA = A$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

Proposition 33. $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique si, et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Il existe un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On énoncera les résultats pour $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui se transposent naturellement à $\mathcal{S}(E)$.

Proposition 34. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Définition 35. $u \in \mathcal{S}(E)$ est dite symétrique positive (resp. définie positive) si

$$\forall x \in E,\ \langle x, u(x)\rangle \geqslant 0$$

(resp. $\forall x \in E \setminus \{0\},\ \langle x, u(x)\rangle > 0$). On note $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. définis positifs).

Définition 36. Une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. définie positive) si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \langle X, AX\rangle \geqslant 0$$

(resp. $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \langle X, AX\rangle >\ 0$).

Proposition 37. $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique positive (resp. définie positive) si, et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique positive (resp. définie positive).

Il existe un morphisme d'algèbres entre $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$) et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

2 Réduction

Lemme 38. Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Théorème 39 (spectral)**.** Tout endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée. Toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Définition 40. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit son rayon spectral par $\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

Corollaire 41. En munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle $\|\cdot\|$ induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \rho(A)$.

Corollaire 42. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si, et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$(resp. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$).

Proposition 43. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Théorème-Définition 44 (Diagonalisation simultanée)**.** Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de $\mathcal{S}(E)$. Il existe une base orthonormée commune de diagonalisation dans E de $(u_i)_{i \in I}$ si, et seulement si les u_i commutent deux à deux.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale P telle que pour tout $i \in I$, ${}^tPA_iP$ soit diagonale.

3 Quelques conséquences

Proposition 45. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) est convexe.

Théorème 46. L'application exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 47 (Décomposition polaire)**.** Toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 48. L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (\Omega, S) & \longmapsto & \Omega S \end{array}$ est un homéomorphisme.

Définition 49 (Points extrémaux)**.** Soit C une partie convexe de E. On dit que $A \in C$ est un point extrémal si $C \setminus \{A\}$ est encore convexe.

Proposition 50. Soient C une partie convexe de E et $A \in C$. A est un point extrémal s'il ne peut s'écrire comme le milieu de deux points distincts.

Théorème 51. Soit $B = \overline{B}_{\mathcal{L}(E)}(0,1)$ la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$. Les points extrémaux de B sont les éléments de $\mathcal{O}(E)$.

Développements

1. Homéomorphisme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Points extrémaux de $\overline{B}_{\mathcal{L}(E)}$

Références

[Gri15] Joseph Grifone. Algèbre linéaire. Cépaduès, 2015.

[Rom21] Jean-Étienne Rombaldi. Mathématiques pour l'Agrégation, Algèbre et Géométrie. De Boeck, 2021.