106 | Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications

Cadre : Sauf mention expresse du contraire, E désigne un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur un corps $\mathbb{K}$.

I Le groupe linéaire et ses éléments

1 Définition

[Rom21, p. 139]

Proposition-Définition 1. $\mathrm{GL}(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E. Muni de la loi de composition $\circ$, $GL(E)$ est un groupe. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le choix d'une base de E permet de réaliser un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui induit un isomorphisme de groupes de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ sur $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \cdot)$.

Théorème 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$u \in \mathrm{GL}(E) \iff \ker u = \{0\} \iff \mathrm{Im}(u) = E \iff \mathrm{rg}(u) = n \iff \det(u) \neq 0.$$

Théorème 3. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un unique inverse à gauche (resp. à droite), il est inversible.

2 Sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$

Définition 4. On définit les ensembles $\mathrm{SL}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \det(u) = 1\}$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(K),\ \det(A) = 1\}$.

Théorème 5. $\mathrm{SL}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(E)$ isomorphe à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ qui est distingué dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Le groupe quotient $\frac{\mathrm{GL}(E)}{\mathrm{SL}(E)}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^*$.

Théorème 6. $Z(\mathrm{GL}(E)) = \mathbb{K}^* \cdot \mathrm{Id}$ et $Z(\mathrm{SL}(E)) = \mu_n(\mathbb{K}) \cdot \mathrm{Id}$ où $\mu_n(\mathbb{K})$ est le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{K}^*$.

Théorème 7 (Burnside)**.** [FGN12, p. 185] Tout sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini (*i.e.* il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $A \in G,\ A^N = I_n$) est fini.

[FGN12, p. 182]

Proposition 8. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que pour toute $A \in G,\ A^2 = I_n$. Alors $\mathrm{Card}(G) \leqslant 2^n$.

Application 9. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

3 Élements de $\mathrm{GL}(E)$

Transvections

Définition 10 (Transvection)**.** Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ non nulle. On appelle transvection d'hyperplan $\ker(\varphi)$ toute application $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)a.$$

Notation 11. On note $\tau_{\varphi,a} = \mathrm{Id} + \varphi \cdot a$ une telle transvection.

Théorème 12.
1. $u \in \mathcal{L}(E)$ est une transvection si, et seulement s'il existe un hyperplan H de E tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset H$.
2. Pour toute transvection $\tau_{\varphi,a}$, $\tau_{\varphi,a}^2$ est une transvection et $\tau_{\varphi,a}^2 = \tau_{\varphi,2a}$.
3. Une transvection $\tau_{\varphi,a}$ est dans $\mathrm{GL}(E)$, son inverse est $\tau_{varphi,-a}$, 1 est l'unique valeur propre de $\tau_{varphi,a}$, l'espace propre associé étant $\ker(\varphi)$ si $u \neq \mathrm{Id}$.
4. Le conjugué dans $\mathrm{GL}(E)$ d'une transvection est une transvection.
5. L'ensemble $T(H)$ des transvections d'hyperplan $H = \ker(\varphi)$ est un sous-groupe commutatif de $\mathrm{GL}(E)$ isomorphe au groupe additif $(H, +)$.
6. Une transvection u admet un polynôme minimal qui est $X - 1$ si $u = \mathrm{Id}$.

Théorème 13. Soit $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. u est une transvection ;
2. il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $T_n = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
3. il existe une base dans laquelle la matrice de u est $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$;
4. $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) = 1$ et le polynôme caractéristique de u est $(X - 1)^n$.

Dilatation

Définition 14. Soit φ une forme linéaire non nulle de E. On appelle dilatation d'hyperplan $\ker(\varphi)$ toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ définie par

$$\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)a.$$

où $a \in E \setminus \ker(\varphi)$

Notation 15. On note $\delta_{\varphi,a}$ une telle dilatation.

Théorème 16. Une dilatation $\delta_{\varphi,a}$ est dans $\mathrm{GL}(E)$ si, et seulement si $\lambda = 1 + \varphi(a) \neq 0$.

Théorème 17.

1. Un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ est une dilatation si, et seulement s'il existe un hyperplan H tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et u est diagonalisable de valeurs propres 1 et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.
2. Le conjugué dans $\mathrm{GL}(E)$ d'une dilatation est une dilatation de même rapport.
3. Une dilatation u de rapport λ admet un polynôme minimal qui est $(X - 1)(X - \lambda)$.
4. L'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $\frac{1}{\lambda}$

Théorème 18. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est une dilatation de rapport λ ;
2. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

avec $\lambda = \det(u) \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ (ou une matrice diagonale $D_i\lambda$ avec λ en position (i, i) pour $1 \leqslant i \leqslant n$)

Matrice de permutation

Définition 19 (Permutation)**.** Une matrice de permutation est une matrice $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ pour laquelle il existe un élément σ de $\mathcal{S}_n$ tel que

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ p_{i,j} = \delta_{i,\sigma(i)}.$$

Notation 20. On note P_σ une telle matrice.

II Générateurs de $\mathrm{GL}(E)$

1 Méthode de Gauss

Objectif : multiplier à gauche ou à droite une matrice en conservant le rang.

Proposition 21. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Multiplier à gauche (resp. à droite) la matrice M par $T_{i,j}(\lambda)$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$).
2. Multiplier à gauche (resp. à droite) la matrice M par D_λ : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \lambda C_i$.
3. Multiplier à gauche (resp. à droite) la matrice M par P_{sigma} revient à permuter L_i et L_j (resp. C_i et C_j).

Application 22. Résolution de systèmes linéaires et inversion de matrices.

2 Générateurs

[FGN12, p. 178]

Théorème 23. Le groupe $\mathrm{SL}(E)$ (resp. $SL_n(\mathbb{K})$) est engendré par l'ensemble des transvections (resp. matrices de transvection). Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) est engendré par l'ensemble des transvections et des dilatations (resp. matrices de transvection et matrices de dilatation)

Corollaire 24. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices diagonalisables inversibles.

Corollaire 25. Toute matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ s'écrit comme produit de matrices inversibles de trace nulle.

III Topologie de $\mathrm{GL}(E)$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Proposition 26. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Théorème 27. $(\mathcal{L}(E), |||\cdot|||)$ est une algèbre de Banach.

Théorème 28. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert dense dans $\mathcal{L}(E)$ et $u \longmapsto u^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}(E)$

Application 29. L'application $\det$ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}\det(M) \cdot H = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}\, MH).$$

Proposition-Définition 30. Pour $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, on définit l'ensemble $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathrm{GL}(E), \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\|\}$ qui est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. On définit $\mathcal{O}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ {}^tMM = I_n\}$ qui est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Théorème 31. Pour $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$.

Théorème 32. Si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$, c'est alors le conjugué d'un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$.

IV Actions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

1 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par équivalence

Théorème 33. L'application $(P, A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow P \cdot A = PA$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et deux matrices sont dans la même orbite si, et seulement si elles ont le même noyau (en identifiant $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ à l'application linéaire u associée dans la base canonique.

Théorème 34. L'application $(P, A) \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow P \cdot A = AP^{-1}$ définit une action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et deux matrices sont dans la même orbite si, et seulement si elles ont la même image.

Théorème 35. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthogonale (resp. unitaire) et S une matrice symétrique (resp. hermitienne) positive pour l'action de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (resp.$\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par translation à gauche.

Théorème 36. L'application $((P, Q), A) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow (P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$ définit une action à gauche de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ sur E dont les orbites sont les ensembles $\mathcal{O}_r = \{A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}(A) = r\}$ où $r \in [\![0, \min(n, m)]\!]$

2 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison

Théorème 37. L'application $(P, A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto PAP^{-1}$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 38. Deux matrices qui sont dans la même orbite ont même rang, même déterminant, même polynôme caractéristique, même polynôme minimal et même trace.

Théorème 39. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ les orbites pour l'action par similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont connexes d'intérieur vide (donc non ouvertes). Une telle orbite est bornée si, et seulement si elle est réduite à une matrice scalaire λI_n, ce qui revient à dire que A est dans le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 40. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'orbite d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour l'action de similitude est fermée si, et seulement si A est diagonalisable.

Théorème 41 (Brauer)**.** On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Soient $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$. σ et τ sont conjuguées si, et seulement si P_σ et P_τ sont semblables.

Développements

1. Théorème de Burnside
2. Générateurs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
3. Théorème de Brauer

Références

[FGN12] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. Oraux X ENS, Algèbre 2. Cassini, 2012.

[Rom21] Jean-Étienne Rombaldi. Mathématiques pour l'Agrégation, Algèbre et Géométrie. De Boeck, 2021.