leçons : 266 Séries de Fourier
260 : Espérance, variance et moments
264 : va discrètes.

Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$

(23)

Références

Modèle : Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et (u_i) la bc de $\mathbb{R}^d$. On pose $S_0 = 0 \in \mathbb{Z}^d$, le $k^{ème}$ pas est noté $e_k \in \{\pm u_i \mid 1 \leq i \leq d\} = A$ et $\mathbb{P}(e_k = u_i) = \mathbb{P}(e_k = -u_i) = \frac{1}{2d}$ $\forall i \in [\![1,d]\!]$

Les e_k sont des va iid, de sorte que $\mathbb{P}(e_1 = \varepsilon_1, \dots, e_k = \varepsilon_k) = \frac{1}{(2d)^k}$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$ pour $n \geq 1$

Thm : 1) Si $d \leq 2$, alors $\mathbb{P}(S_n = 0 \text{ infiniment souvent}) = 1$

2) Si $d \geq 3$, alors $\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} |S_n| = +\infty) = 1$

preuve :

① __Lien avec les séries de Fourier__

On pose $f_n(x) = \mathbb{E}(e^{2i\pi S_n \cdot x}) = \varphi_{S_n}(2\pi x)$ où φ_{S_n} est la fonction caractéristique de S_n

On a $f_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}[S_n = k] e^{2i\pi k\cdot x}$

Le but est de retrouver $\mathbb{P}[S_n = k]$ grâce aux coefficients de Fourier de f_n

② __Calcul de f_n__

$$f_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}\Big[\coprod_{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n \in A\\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n = k}} \big(\bigcap_{i=1}^{n} e_i = \varepsilon_i\big)\Big] e^{2i\pi k\cdot x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n \in A\\ \varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n = k}} \frac{1}{(2d)^n} e^{2i\pi k\cdot x}$$

$$= \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in A} \frac{1}{(2d)^n} e^{2i\pi \varepsilon_1\cdot x} \times \dots \times e^{2i\pi \varepsilon_n \cdot x} = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in A} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2d} e^{2i\pi \varepsilon_j\cdot x}$$

$$= \Big(\sum_{\varepsilon\in A} \frac{1}{2d} e^{2i\pi \varepsilon\cdot x}\Big)^n = \Big(\sum_{j=1}^{d} \frac{e^{2i\pi x_j} + e^{-2i\pi x_j}}{2d}\Big)^n = \Big(\sum_{j=1}^{d} \frac{1}{d}\cos 2\pi x_j\Big)^n$$

$$= (f(x))^n \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos 2\pi x_j. \quad \forall x \quad |f(x)| \leq 1$$

③ __Coefficients de Fourier de f_n__

Par injectivité des coefficients de Fourier de f_n, on obtient $c_k(f_n) = \mathbb{P}[S_n = k]$

D'où $\mathbb{P}[S_n = k] = c_k(f^n) = \int_{[0,1]^d} f(t)^n e^{-2i\pi t\cdot k}\, dt$

En particulier $\mathbb{P}[S_n = 0] = \int_{[0,1]^d} f(t)^n\, dt$

④ Espérance du nombre de retours en 0, notée N

$$N = E\Big[\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}(S_n=0)\Big] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_n=0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(S_{2n}=0)$$

(car il faut faire autant de pas dans un sens que dans l'autre)

$N = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,1]^d} f(t)^{2n}\,dt$ On peut permuter Σ et $\int$ par Fubini-Tonelli car f^{2n} est positive. D'où $N = \int_{[0,1]^d} \Big(\sum_{n\geq 0} (f^2(t))^n\Big)\,dt = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1-f^2(t)}\,dt$

avec la convention $\frac{1}{1-f^2(t)} = +\infty$ si $f^2(t)=1$ (on a $\forall t \ |f(t)|^2 \leq 1$)

$$f^2(t) = 1 \iff f(t) = \pm 1 \iff \sum_{i=1}^d \cos(2\pi t_i) = \pm d$$
$$\iff (t_1,\dots,t_d) \in \{0,1\}^d \text{ ou } (t_1,\dots,t_d) = \tfrac{1}{2}(1,\dots,1)$$

On étudie l'intégrabilité en $(0,\dots,0)$ (les autres points se font de la même manière par changement de variable)

$$f(t_1,\dots,t_d)^2 = \Big(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \cos(2\pi t_i)\Big)^2 = \frac{1}{d^2}\Big(\sum_{i=1}^d 1 - 2\pi^2 t_i^2 + o(\|t\|^2)\Big)^2$$
$$= \frac{1}{d^2}\Big(d - 2\pi^2\sum_{i=1}^d t_i^2 + o(\|t\|^2)\Big)^2 = \Big(1 - \frac{2\pi^2}{d}\sum_{i=1}^d t_i^2 + o(\|t\|^2)\Big)^2$$
$$= 1 - \frac{(2\pi)^2}{d}\sum_{i=1}^d t_i^2 + o(\|t\|^2)$$

Donc $1 - f(t)^2 \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(2\pi)^2}{d}\|t\|_2^2$

Donc $\frac{1}{1-f^2}$ est intégrable en 0 $\iff t \mapsto \frac{1}{\|t\|^2}$ l'est en 0 $\iff 2 < d$

D'où $N < +\infty$ si $d \geq 3$ et $N = +\infty$ si $d \leq 2$

⑤ Conclusion

. Si $d \geq 3$, l'espérance du nombre de retours en 0 est finie. Le même raisonnement appliqué à tout point de $\mathbb{Z}^d$ montre que ps S_n sort de toute boule centrée en 0 [voir que $N = E[\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}] \geq +\infty \cdot \mathbb{P}[\sum_{n\geq 0}\mathbb{1}_{\{S_n=0\}} = +\infty] = +\infty\cdot\mathbb{P}[S_n=0$ une infinité de fois$]$]

Donc $\mathbb{P}[|S_n| \to +\infty] = 1$

. Si $d \leq 2$, on pose p la probabilité d'un retour en 0. La probabilité de visiter 0 au moins m fois est p^{m-1} et celle de faire exactement m visites est $p^{m-1} - p^m = p^{m-1}(1-p)$. Si $p < 1$, alors $N = \sum_{m\in\mathbb{N}} m(p^{m-1}-p^m) = (1-p)\sum_{m\in\mathbb{N}} m p^{m-1} < +\infty$

Ce qui est impossible. Donc $p = 1$ et on visite une infinité de fois 0 ps.