261 | Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications

Notation 1. On se place dans $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure de probabilité P.On considère $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans E.

I Loi d'une variable aléatoire

[Gal06, p. 93, 8.1.2]

Définition 2. La loi d'une variable aléatoire X est la mesure-image de P par X. C'est donc la mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$, notée P_X définie par

$$\forall B \in \mathcal{E},\ P_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

Notation 3. On écrit $P_X(B) = P(X \in B)$.

1 Variables aléatoires discrètes

Proposition-Définition 4 (v.a. discrète)**.** X est une variable aléatoire discrète lorsque E est dénombrable et $\mathcal{E}$ est l'ensemble des parties de E. La loi de X est alors $P_X = \sum_{x \in E} p_x \delta_x$.

Exemple 5.

1. Loi uniforme : E ensemble fini, $\mathrm{Card}(E) = n$. $\forall x \in E,\ P(X = x) = \frac{1}{n}$.
2. Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$: X est à valeurs dans $\{0,1\}$, $\forall P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p$.
3. Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ ($n \in \mathbb{N}^*,\ p \in [0,1]$: X est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
4. Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$: X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.
5. Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

2 Variables aléatoires à densité

Proposition-Définition 6. Une variable aléatoire X à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est dite à densité si P_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ. Dans ce cas, il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ telle que $P_X(B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque 7. En particulier, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = P(X \in \mathbb{R}^d) = 1$. La fonction f unique à un ensemble de mesure de Lebesgue nulle près, est appelée la densité de (la loi de) X.

Exemple 8. 1. Loi uniforme sur $[a,b]$ ($a<b$) : $f(x)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.

2. Loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
3. Loi normale, $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ ($m\in\mathbb{R},\ \sigma>0$) : $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.
4. Loi Γ $\Gamma(a,\gamma)$: $f(x)=\frac{\gamma^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\gamma x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

Remarque 9. Il existe des lois qui ne sont ni discrètes ni à densité.

II Outils et caractérisations

1 Espérance mathématique

Définition 10. Soit X une v.a. réelle. On note

$$E(X)=\int_\Omega X(\omega)P(\mathrm{d}\omega)$$

qui est bien définie dans les deux cas suivants :
- $X\geqslant 0$
- $E(|X|)<\infty$

Théorème 11 (Transfert)**.** Soit X une v.a. à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$. Pour toute fonction mesurable $f:E\to[0,\infty]$,

$$E(f(X))=\int_E f(x)P_X(dx).$$

Application 12 (Théorème de Weierstrass)**.** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Proposition 13. Soient X une v.a. réelle et ν une mesure de probabilité. X est de loi ν si, et seulement si pour toute fonction borélienne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$,

$$E(f(X))=\int_\mathbb{R} f\,\mathrm{d}\nu.$$

Proposition 14. Soit $X=(X_1,\dots,X_d)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Supposons que la loi de X ait une densité $f:\mathbb{R}^d\to R_+$. Alors pour tout $j\in[\![1,d]\!]$, la loi de X_j a une densité donnée par

$$f_j(x)=\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(x_1,\dots,x_{j-1},x,x_{j+1},\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_{j-1}\,\mathrm{d}x_{j+1}\,\mathrm{d}x_d.$$

2 Fonction de répartition

Définition 15 (Fonction de répartition)**.** Soit X une v.a. réelle. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ définie par

$$\forall t\in\mathbb{R},\ F_X(t)=P(X\leqslant t)=P_X(]-\infty,t]).$$

Propriété 16. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est

1. croissante,
2. continue à droite,
3. continue à gauche en x si, et seulement si $P(X = x) = 0$,
4. a pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Proposition 17. Si on se donne une fonction F croissante, continue à droite, ayant pour limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, il existe une unique mesure de probabilité μ telle que $\mu(]-\infty, t]) = F(t)$.

Théorème 18. Soit F la fonction de répartition associée à une loi μ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, avec les points de discontinuité $a_1, \ldots, a_n$. Alors μ se décompose en la somme d'une partie à densité, f qui est la dérivée de F là où F est dérivable et d'une partie discrète qui est $\nu = \sum_{i=1}^n \mu(a_i)\delta_{a_i}$.

Proposition 19. Soit X une v.a. réelle. La fontion de répartition F_X caractérise la loi P_X de X.

3 Fonction caractéristique

Définition 20 (Fonction caractéristique)**.** Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, la fonction caractéristique de X est la fonction $\Phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \Phi_X(\xi) = E(\exp(i\xi \cdot X)).$$

On peut écrire

$$\Phi_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot x} P_X(\mathrm{d}x).$$

Exemple 21.

1. La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2) : t \longmapsto \exp(imt) \exp -\frac{1}{2}\sigma^2 t^2$.
2. La fonction caractéristique de loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, b)$ est $t \longmapsto \Phi(t) = e^{iat}e^{-b|t|}$.

Propriété 22. La fonction caractéristique d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est continue, bornée

Théorème 23. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ caractérise la loi de cette variable aléatoire.

4 Fonction génératrice

Définition 24 (Fonction génératrice)**.** Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice de X est la fonction g_X définie sur $[0, 1]$ par

$$g_X(r) = E(r^X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) r^n.$$

Propriété 25. La fonction génératrice g_X d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. g_X est continue sur $[0,1]$;
2. $g_X(0) = P(X=0)$ et $g_X(1) = 1$;
3. le rayon de convergence de la série la définissant est de rayon supérieur ou égal à 1.
4. pour tout entier $p \geqslant 1$, $g_X^{(p)}(1) = E(X(X-1)\cdots(X-p+1))$.

Proposition 26. La fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ caractérise la loi de cette variable aléatoire :$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$.

Application 27. [GK11, p.211] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi de Poisson de paramètre λ et Y une loi de Poisson de paramètre μ. Alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

III Indépendance

Définition 28 (Indépendance de v.a.)**.** Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ n sous-tribus de $\mathcal{A}$. On dit que $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ sont indépendantes si, et seulement si

$$\forall A_1 \in B_1, \dots, \forall A_n \in \mathcal{B}_n,\ P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\cdots P(A_n).$$

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables à valeurs respectivement dans $(E_1, \mathcal{E}_1), \dots, (E_n, \mathcal{E}_n)$. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si les tribus $\sigma(X_1), \dots \sigma(X_n)$ le sont.

Théorème 29. Les n v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si, et seulement si la loi du n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ est le produit des lois de $X_1, \dots, X_n$:

$$P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}.$$

De plus, on a alors

$$E(\prod_{i=1}^n f_i(X_i)) = \prod_{i=1}^n E(f_i(X_i)),$$

où f_i est une fonction mesurable positive sur $(E_i, \mathcal{E}_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Corollaire 30. Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a. réelles.

1. Supposons que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i ait une densité p_i et que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. Alors la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ a une densité donnée par $p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i)$.
2. Supposons que la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ ait une densité de la forme $p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n q_i(x_i)$, où les fonctions q_i sont boréliennes positives sur $\mathbb{R}$. Alors, les v.a. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i a une densité p_i qui s'écrit $p_i = C_i q_i$ où C_i est une constante.

Exemple 31. Soit U une v.a de loi exponentielle de paramètre $1.$ et soit V une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. On suppose que U et V sont indépendantes. Soient $X = \sqrt{U}\cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{U}\sin(2\pi V)$. X et Y sont indépendantes.

Proposition 32. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

1. La loi de $X+Y$ est $P_X * P_Y$. En particulier, si X a une densité p_X et Y a une densité p_Y, alors $X+Y$ a pour densité $p_X * p_Y$.
2. La fonction caractéristique de $X+Y$ est $\Phi_{X+Y}(\xi) = \Phi_X(\xi)\Phi_Y(\psi)$.

Lemme 33 (Borel-Cantelli)**.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. Si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors $P(\limsup(A_n)) = 0$.
2. On suppose que les événements A_n sont indépendants. Si la série $\sum P(A_n)$ diverge, alors $P(\limsup(A_n)) = 1$.

IV Convergence en loi

[Gal06, p. 131, 10.3]

Notation 34. $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ munie de la norme sup $\|\varphi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|$.

Définition 35. Une suite (μ_n) de mesures de probablités sur $\mathbb{R}^d$ converge étroitement vers une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ (on note $\mu_n \overset{(e)}{\to} \mu$) si

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \,\mathrm{d}\mu_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \,\mathrm{d}\mu.$$

Une suite (X_n) de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (on note $X_n \overset{\text{(loi)}}{\to} X$) si la suite (P_{X_n}) converge étroitement vers P_X. Cela équivaut à

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d),\ E(\varphi(X_n)) \underset{n\to\infty}{\to} E(\varphi(X)).$$

Exemple 36.

1. Si les v.a. X_n et X sont à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, alors X_n converge en loi vers X si, et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{Z}^d,\ P(X_n = x) \underset{n\to\infty}{\to} P(X = x).$$
2. Si les X_n sont des v.a. à densité, $P_{X_n}(dx) = p_n(x)\,\mathrm{d}x$, si on suppose que $p_n(x) \to p(x)$ $\mathrm{d}x$-p.p. et s'il existe une fonction $q \geqslant 0$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} q(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n(x) \leqslant q(x),\ \mathrm{d}x\text{p.p.},$$
alors p est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et X_n converge en loi vers la loi $p(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 37. Soit (X_n) une suite de variables suivant une loi binomiale de taille n et de paramètre p_n. On suppose que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Alors (X_n) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Théorème 38. [GK11, p.266] Soit g une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^d$. Si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers X, alors $(g(X_n))_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $g(X)$.

Corollaire 39. [GK11, p.266] Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si $(X_n, Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers (X, Y), alors,

1. $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$.
2. $\langle X_n, Y_n\rangle$ converge en loi vers $\langle X, Y\rangle$.

1 Critère avec la fonction de répartition

Théorème 40. [GK11, p.273][admis] Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X. On a équivalence entre

1. (X_n) converge en loi vers X.
2. Pour tout point où la fonction de répartition de X est continue, $F_{X_n}(x)$ converge simplement vers $F_X(x)$.

2 Critère avec la fonction caractéristique

Théorème 41 (Lévy faible)**.** [QZ20, p. 544] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles. Si X est une v.a. réelle, on a équivalence entre :

1. (X_n) converge en loi vers X.
2. Φ_{X_n} converge simplement vers Φ_X.

Exemple 42. X_n suivant la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Théorème 43 (Central-limite)**.** [CR16, p. 277] Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuéees admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance communes à ces variables. Alors

$$\frac{(X_1 + \cdots X_n) - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Lemme 44 (Slutsky)**.** [GK11, p.275] Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si (X_n) converge en loi vers X et (Y_n) converge en loi vers un vecteur constant, alors

1. $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + c$.
2. $\langle X_n, Y_n\rangle$ converge en loi vers $\langle X, c\rangle$.

Application 45. [GK11, p.283] Preuve probabiliste de la formule de Stirling.

Références

[Gal06] Jean-François Le Gall. Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires. 2006.

[GK11] Olivier Garet et Aline Kurtzmann. De l’intégration aux probabilités. Ellipses, 2011.

[CR16] Marie-Line Chabanol et Jean-Jacques Ruch. Probabilités et statistiques pour l’épreuve de modélisation à l’ag
Ellipses, 2016.

[QZ20] Hervé Queffélec et Claude Zuily. Analyse pour l’agrégation (5^{e} édition). Dunod, 2020.