246 | Séries de Fourier. Exemples et applications

[Amr08]

Notation 1. On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions réelles bornées, $L^p_{2\pi}$ les fonctions 2π-périodiques dans L^p.

I Séries de Fourier et séries trigonométriques

1 Résultats préliminaires

Espace $L^2_{2\pi}$

On munit $L^2_{2\pi}$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$ de sorte à obtenir un espace de Hilbert.

Définition 2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n l'élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ donné par $e_n(x) = e^{inx}$. $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelé système trigonométrique. On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie d'éléments du système trigonométrique.

Théorème 3. L'ensemble des polynômes trigonométriques muni de la norme uniforme est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Théorème 4. $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Sommabilité et série trigonométrique

Définition 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. On dit que la série $\sum_{\mathbb{Z}} u_n$ converge si chacune des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ converge. Sa somme est alors notée $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ et est définie par

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

Définition 6. On appelle série trigonométrique toute somme de la forme $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ dont la convergence est donnée dans la définition précédente.

2 Séries de Fourier

Coefficients de Fourier

Notation 7. Pour toute fonction réelle f à valeurs complexes, $a \in \mathbb{R}$, on note f_σ la fonction $x \longmapsto f(-x)$, et $\tau_a(f)$ la fonction $x \longmapsto f(x-a)$.

Définition 8 (Coefficients de Fourier)**.** Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 9. Si $f \in L^2_{2\pi}$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.

Définition 10 (Convolution)**.** Soient $f, g \in L^1_{2\pi}$, le produit de convolution $f * g$ au point x, quand il existe, est donné par

$$f * g\ (x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-x)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette formule a un sens pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$.

Propriété 11. Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$, $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$ et $g \in L^\infty_{2\pi}$. Alors

1. $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$;
2. $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$;
3. $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$;
4. $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)e_n$;
5. $f * e_n = c_n(f)e_n$;
6. $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty$;
7. Si f est de plus continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $c_n(f') = inc_n(f)$

Proposition 12. Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On a $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.

Remarque 13. Compte tenu de l'égalité $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$, une fonction définie par la somme d'une série trigonométrique peut se réécrire sous la forme $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ où $a_n = 2c_0$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ pour $n \geqslant 1$.

Définition 14. Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On définit les coefficients de Fourier réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$ par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

On a donc $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$, $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$ et $c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$

Propriété 15.

1. Si f est paire, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ et $b_n(f) = 0$.
2. Si f est impaire, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$.

Série de Fourier

Définition 16. Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$ où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f. On note $S_N(f)$ la somme partiel de la série de Fourier de f à l'ordre N.

Remarque 17. Toute série de Fourier est série trigonométrique mais la réciproque est fausse !

Exemple 18. $\sum_{n\geqslant 1}\cos(nx)$ est une série trigonométrique mais n'est pas une série de Fourier puisque ses coefficients ne tendent pas vers 0.

3 Somme de Cesàro et noyaux trigonométriques

Définition 19. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. On note $\sigma_N(f)$ la N-ième somme de Cesàro de la série de Fourier f : $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^N S_k(f)$.

Noyau de Dirichlet

Définition 20. La fonction $D_N = \sum_{n=-N}^N e_n$ est appelée noyau de Dirichlet d'ordre N.

Propriété 21.

1. D_n est une fonction paire, 2π-périodique et vérifie $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi D_N(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
2. D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$.
3. Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, $S_N(f) = f * D_N$.

Noyau de Fejér

Définition 22. La fonction $K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est appelée noyau de Fejér.

Propriété 23. $K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$ et $\sigma_N(f) = f * \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n$.

II Convergence des séries de Fourier

Théorème 24. Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. Si la suite $S_N = u_n e^{inx}$ converge vers f dans $L^1_{2\pi}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}$ est la série de Fourier de f.

1 Convergence au sens de Cesàro

Théorème 25 (Fejér).

1. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et $\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$.
2. Si $f \in L^p_{2\pi}$, avec $p \geqslant 1$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leqslant \|f\|_p$ et $\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$.

Application 26 (Théorème de Weierstrass)**.** Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes.

2 Convergence en moyenne quadratique

Théorème 27 (Formule de Parseval)**.** Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors

1. $\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$
2. On a la formule de Parseval, $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$.

Remarque 28. En coefficients réels, la formule de Parseval s'écrit

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2.$$

3 Convergence ponctuelle et uniforme

[Gou08, p. 271]

Théorème 29 (Jordan-Dirichlet)**.** Soient $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que la fonction

$$h \longmapsto \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{h}$$

est bornée au voisinage de 0. Alors $(S_n(f))$converge et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

Corollaire 30. Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série de Fourier de f converge en ce point vers $\frac{f(x^+)-f(x^-)}{2}$. En particulier, si f est continue en x, la série de Fourier de f en x vers $f(x)$.

Application 31. En étudiant la série de Fourier de la fonction 2π-périodique $x \longmapsto 1 - x^2/\pi^2$ sur $[-\pi, \pi]$, on montre que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} = \frac{\pi^4}{90}$.

Théorème 32. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

III Application

1 Formule sommatoire de Poisson

Proposition 33 (Formule sommatoire de Poisson)**.** [Gou08, p. 283] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ lorsque $|x| \to +\infty$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nt}.$$

Application 34. $\forall s > 0$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2/s}$

Théorème 35 (Critère de Shannon)**.** Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Supposons que $\widehat{f}$ soit inclus dans $[-F, F]$ avec $F > 0$ vérifiant le critère de Shannon $2F \leqslant 1$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin((n-t)\pi)}{(n-t)\pi}.$$

2 Équation de la chaleur

Théorème 36. [BB18, p. 93] Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Notons K_f l'ensemble des éléments

$$u : \begin{array}{ccc} [0,\pi] \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & u(x,t) \end{array}$$

de $\mathcal{C}([0,\pi]\times\mathbb{R}_+)$ qui vérifient :

1. (a) $\partial_x u$ et $\partial_t u$ existent et sont continues sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,
   (b) $\partial^2_{x^2}$ existe et est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,
   (c) pour tout $t \geqslant 0$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,
   (d) pour tout $(x,t) \in [0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, $\partial_t u(x,t) = \partial^2_{x^2} u(x,t)$;
2. Pour tout $x \in [0,\pi]$, $u(x,0) = f(x)$.

Alors K_f est un singleton.

Remarque 37. Ce problème modélise l'évolution de la température $u(x,t)$ au cours du temps t d'un point d'abscisse x d'une barre conductrice de longueur π dont les extrémités sont maintenues à la température 0.

IV Développements

1. Formule sommatoire de Poisson
2. Équation de la chaleur

Références

[Amr08] Mohammed El Amrani. Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Ellipses, 2008.

[Gou08] Xavier Gourdon. Les maths en tête, Analyse. Ellipses, 2008.

[BB18] Julien Bernis et Laurent Bernis. Analyse pour l'agrégation de mathématiques. Ellipses, 2018.