250 | Transformation de Fourier. Applications

Notation 1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$. On note $\langle x, y\rangle$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire canonique de x par y. $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\lambda_d(x)$ où λ_d désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$.

I Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

1 Définitions

[Bon, p. 163]

Théorème-Définition 2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\widehat{f}$ définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$$

[Amr08, p. 109]

Lemme 3 (Riemann-Lebesgue)**.** Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{\|\xi\|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 4. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0$. L'application $\mathcal{F}$: $\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array}$ est linéaire continue, et $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Notation 5. On note $\overline{\mathcal{F}}$ l'application conjuguée définie par $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$.

Exemple 6.
1. Densité de Poisson : $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. $\widehat{p}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$.
2. Fonction caractéristique d'un intervalle borné $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ $(a < b)$,

$$\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i(a+b)\xi/2} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b - a \text{ si } \xi = 0 \end{cases}.$$

3. $a > 0$, $f(x) = e^{-ax^2}$, $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.
4. $a > 0$, $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$, $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$

2 Translation, modulation, homothétie

Notation 7. Soit f une fonction définie dans $\mathbb{R}^d$. On définit
1. la symétrisée f_σ de f par $f_\sigma(x) = f(-x)$.
2. La translatée $\tau_a f$ de f par $\tau_a f(x) = f(x-a)$, $a \in \mathbb{R}^d$

Propriété 8.

$$\mathcal{F}(f_\sigma) = (\mathcal{F}(f))_\sigma,\ \mathcal{F}(\overline{f}) = \overline{(\mathcal{F}(f))}_\sigma,\ \overline{\mathcal{F}}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}.$$

Propriété 9. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}(f(\lambda\cdot))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d}\mathcal{F}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.
2. $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\cdot\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$ et $\mathcal{F}(e^{ia\cdot x}f)(\xi) = \tau_a(\mathcal{F}(f))(\xi)$.

3 Convolution

Proposition 10. Pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

Application 11.

1. Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * f = f$ a une unique solution : la fonction nulle..
2. L'équation $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$ n'a pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Application 12. Il n'y a pas de neutre pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

4 Inversion

Théorème 13 (Formule d'échange)**.** Pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\widehat{g}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(v)g(v)\,\mathrm{d}v.$$

Théorème 14. La transformée de Fourier $\mathcal{F}$: $\begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} \end{array}$ est injective.

Remarque 15. La transformée n'est pas bijective ! Considérer une fonction $g \in \mathcal{C}_0$ impaire telle que $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{g(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ n'existe pas.

Théorème 16 (Formule d'inversion)**.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^d f_\sigma$ λ_d-p.p.

Proposition 17. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{f} * \widehat{g}.$$

5 Transformée et dérivée

Transformée d'une dérivée

Proposition 18. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $j \in [1, d] \cap \mathbb{N}$. Si $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi).$$

Dérivée d'une transformée

Proposition 19. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $x \longmapsto x_j f(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\widehat{f}$ admet une dérivée $\partial_j \widehat{f}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$ donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \partial_j(\mathcal{F}(f))(\xi) = -i\mathcal{F}(x_j f)(\xi).$$

II Transormée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Théorème 20 (Formule de Plancherel-Parseval)**.** Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2.$$

Théorème 21. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors

1. Il existe une suite (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$
2. Pour une telle suite (f_n), la suite $\widehat{(f_n)}$ converge dans L^2 vers une limite $\tilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Définition 22. $\tilde{f}$ définie par le théorème précédent est appelée la transformée de Fourier-Plancherel de f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 23. Si $f \in {}^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier-Plancherel $\tilde{f}$ coïncide avec la tranformée de Fourier $\widehat{f}$.

Notation 24. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on notera $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier-Plancherel.

Proposition 25. Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$f * g = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \cdot \widehat{g})$$

et

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Proposition 26. Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d) \text{ et } f * g = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}).$$

Définition 27. On appelle opérateur de Fourier-Plancherel l'opérateur

$$\mathcal{P} : \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto & \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\mathcal{F}(f) \end{array}$$

qui est un opérateur linéaire bijectif de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

III Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Notation 28. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_d)$, on note

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \text{ et } D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$$

Définition 29. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} |x^\alpha f(x)| = 0.$$

Lemme 30. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est à décroissance rapide, alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Définition 31. On appelle espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ telles que

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
2. f ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.

Proposition 32.
1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel.
2. $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
3. $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \forall \beta \in \mathbb{N}^d,\ x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
4. $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
5. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\overline{f}$, f_σ, $\tau_a f$ et $f(\cdot)e^{-i\langle a, \cdot \rangle}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 33. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par transformation de Fourier.

Définition 34. On dit qu'une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \ \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta f_n(x)| = 0.$$

Théorème 35. La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective et bicontinue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

IV Applications

1 Probabilités

Définition 36 (Fonction caractéristique)**.** Si X est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, la fonction caractéristique de X est la fonction $\Phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \Phi_X(\xi) = E(\exp(i\xi \cdot X)).$$

On peut écrire

$$\Phi_X(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x} P_X(\mathrm{d}x).$$

Remarque 37. Si X admet une densité f, alors sa fonction caractéristique est $\xi \longmapsto \widehat{f}(-\xi)$.

Exemple 38.

1. La fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$: t \longmapsto \exp(imt) \exp -\frac{1}{2}\sigma^2 t^2.$$

2. La fonction caractéristique de loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, b)$ est $t \longmapsto \Phi(t) = e^{iat}e^{-b|t|}$.

2 Traitement du signal

Proposition 39 (Formule sommatoire de Poisson)**.** [Gou08, p. 283] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ lorsque $|x| \to +\infty$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nt}.$$

Application 40. $\forall s > 0$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2/s}$

Théorème 41 (Critère de Shannon)**.** Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Supposons que $\widehat{f}$ soit inclus dans $[-F, F]$ avec $F > 0$ vérifiant le critère de Shannon $2F \leqslant 1$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin((n-t)\pi)}{(n-t)\pi}.$$

3 Polynômes orthogonaux

Définition 42. Soit w un poids sur $]a,b[$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) *i.e.* une fonction de $C^0(]a,b[, \mathbb{R}_+^*))$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b |x|^n w(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Sous ces hypothèses, on considère l'espace vectoriel E_w des fonctions réelles continues sur $]a,b[$ telles que

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

On munit E_w d'un produit scalaire naturel

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) g(x) w(x) \, \mathrm{d}x.$$

Proposition 43. Soit w une fonction poids dans un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_a^b e^{\alpha|x|} w(x) \, \mathrm{d}x < +\infty,$$

alors les polynômes orthogonaux associés à w forment une base hilbertienne de $L^2(]a,b[, \mathbb{R})$.

Développements

1. Formule sommatoire de Poisson et application
2. Densité des polynômes orthogonaux

Références

[Amr08] Mohammed El Amrani. Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Ellipses, 2008.

[Gou08] Xavier Gourdon. Les maths en tête, Analyse. Ellipses, 2008.

[Bon] Jean-Michel Bony. Cours d'analyse. Ellipses.