215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications

Cadre :
- E est un ev de dimension $n \in \mathbb{N}$
- $(e_1, \dots, e_n)$ base de E
- F est un ev de dimension $p \in \mathbb{N}$
- $(e'_1, \dots, e'_p)$ base de F
- U ouvert de E
- I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$
- $f : U \to F$ application quelconque

I. Différentielle et dérivée partielle

1) Différentiabilité

Déf 1 : Soit $a \in U$. f est différentiable en a s'il existe une application linéaire de E dans F notée $df(a)$ telle que
$f(a+h) = f(a) + df(a)\cdot h + o(\|h\|)$.
f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point $a \in U$. Dans ce cas, on définit sa différentielle
$$df : U \longrightarrow \mathcal{L}(E,F), \quad a \longmapsto df(a)$$

Rem 2 : Si la différentielle en a existe, elle est unique.

Ex 3 : $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{-1}$ est différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$ et
$\forall A \in GL_n(\mathbb{R})\ \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ df(A)\cdot H = -A^{-1}HA^{-1}$

Ex 4 :
1) $f : I \to \mathbb{R}$ est différentiable en a ssi elle est dérivable en a et dans ce cas, $\forall h \in \mathbb{R}$, $df(a)\cdot h = f'(a)h$
2) Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors f est différentiable sur E et $\forall a \in E$, $df(a) = f$.
3) G un ev de dimension q. Si $B : E \times F \to G$ est bilinéaire, alors B est différentiable sur $E \times F$ et
$\forall (x,y) \in E\times F$, $\forall (h,k) \in E \times F$, $dB(x,y)\cdot(h,k) = B(x,k) + B(h,y)$

Prop 5 : Si f est différentiable en a, alors f est continue en a

Rem 6 : La réciproque est fausse : $x \mapsto |x|$.

Prop 7 : Notons $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e'_i$. f est différentiable en $a \in U$ ssi chaque composante f_i l'est.
Dans ce cas, $df(a) = \sum_{i=1}^{p} df_i(a)\, e'_i$

Prop 8 : Soient $f, g : U \to F$. Si f et g sont différentiables en a, alors $f + \lambda g$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ l'est aussi et $d(f+\lambda g)(a) = df(a) + \lambda\, dg(a)$.

Prop 9 : Soient V un ouvert de F, $f : U \to F$ telle que $f(U) \subset V$ et $g : V \to G$. Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g\circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

Prop 10 : Si U est connexe, f est différentiable sur U et $df = 0$, alors f est constante.

App 11 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x-y\|^2$ avec $C > 0$, alors f est constante.

2) Dérivée directionnelle

Déf 12 : Soit $v \in E \setminus \{0\}$. Alors il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall t \in V$, $a + tv \in U$. f admet une dérivée en a suivant le vecteur v si $\varphi : V \to F$, $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, ie si $\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ existe.
Dans ce cas, on la note $\partial_v f(a)$.

Déf 13 : f admet une dérivée partielle par rapport à la i-ème place si elle admet une dérivée en a suivant le vecteur e_i.
Dans ce cas, on la note $\partial_i f(a)$.

Prop 14 : Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a suivant tout vecteur $v \in E \setminus \{0\}$ et
$\partial_v f(a) = df(a)\cdot v$.

Rem 15 : La réciproque est fausse : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$

Prop 16 : Si f est différentiable en a, alors pour tout $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$, $df(a)\cdot h = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a)$.

Déf 16 : On note $f = \sum_{i=1}^{p} f_i e'_i$. Si f est différentiable en a, on appelle matrice jacobienne de f en a, notée $Jf(a)$ la matrice de $df(a)$ dans les bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_p)$.
Alors $Jf(a) = (\partial_j f_i(a))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$
Si $n = p$, on appelle jacobien de f en a le déterminant de

cette matrice.

Thm-déf 17 : Si E est muni d'un produit scalaire et $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in E$ appelé gradient de f en a tel que pour tout $h \in E$,

$$df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Prop 18 : Avec les hypothèses précédentes, si $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)\, e_i$

3) Théorème des accroissements finis et applications $\mathcal{C}^1$.

Def 19 : f est de classe $\mathcal{C}^1$ si f est différentiable sur U et sa différentielle est continue

Thm 20 (TAF) : Soient U un convexe de E, $(a,b) \in U^2$ tels que $a \neq b$, $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = df(c)(b-a).$$

Thm 21 (IAF) : Soient U un convexe de E, $(a,b) \in U^2$ tels que $a \neq b$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que f soit différentiable sur $]a,b[$ et $M = \sup_{t \in]0,1[} \| df(a + t(b-a)) \| < +\infty$

Alors $\| f(b) - f(a) \| \leq M \| b - a \|$

Thm 22 : $f : U \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si pour tous $i \in [\![1,p]\!]$, $j \in [\![1,n]\!]$, $\partial_j f_i$ est définie et continue sur U.

DEV 1

App 23 : Le déterminant est une application différentiable sur $GL_n(\mathbb{R})$ et $d\det(A) \cdot H = \mathrm{tr}(\mathrm{Com}\, A\, H)$

Application au déterminant wronskien.

4) Différentielle d'ordre supérieur

Thm-déf 24 : Si f est différentiable sur U, sa différentielle définit une application de U dans $\mathcal{L}(E,F)$

f est deux fois différentiable en a si sa différentielle est différentiable en a.

La différentielle seconde en a, notée $d^2 f(a)$ est une application de E dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$ identifié à $\mathcal{L}^2(E \times E, F)$

Thm 25 (Schwarz) Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ (deux fois différentiable en a. Alors toutes les dérivées partielles d'ordre 2 sont définies en a et

$$\forall i \in [\![1,p]\!]\ \forall j \in [\![1,p]\!],\ \partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a)$$

Thm 26 : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose que $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ et $\partial_2 \partial_1 f$ sont définies sur U et $\partial_2 \partial_1 f$ est continue en (x_0, y_0). Alors $\partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0)$ existe et $\partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0) = \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)$

Rem 27 : L'hypothèse de continuité de $\partial_2 \partial_1 f$ est nécessaire

Ex 28 : $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} xy\, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Def 29 : Si f est deux fois différentiable en a, on appelle matrice hessienne de f en a la matrice de $d^2 f(a)$, notée $Hf(a)$. $Hf(a) = (\partial_i \partial_j f(a))_{1 \leq i,j \leq n}$. $Hf(a)$ est symétrique

Thm-déf 30 : De même qu'à l'ordre 2, il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(\dots \mathcal{L}(E,F)\dots)) \to \mathcal{L}^k(E^k, F)$

Sous réserve d'existence, on définit par récurrence la différentielle k-ième de f par $d^k f = d(d^{k-1} f)$

Thm 31 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient U un ouvert non vide de E, $(a,h) \in E^2$ tels que $[a, a+h] \subset U$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Alors $$f(a+h) = f(a) + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{d^\ell f(a) \cdot (h, \dots, h)}{\ell!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th)(h, \dots, h)\, dt$$

II. Théorèmes d'inversion locale et fonctions implicites

1) Théorèmes

Def 32 : Soient U et V respectivement des ouverts de E et F. $f : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si f est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Thm 33 (Inversion locale) Soit $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons qu'il existe $a \in U$ tel que $df(a)$ soit un isomorphisme de E vers F. Alors il existe un ouvert

V contenant a et W contenant $f(a)$ tel que $\tilde{f} : V \to W$ soit un C^1-difféomorphisme.

Rem 34 : Avec les hypothèses précédentes, si $F = E$, le caractère isomorphe se traduit par le fait que le jacobien soit non nul en a.

App 35 :
1) Toute forme quadratique suffisamment voisine de une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente
2) Toute matrice inversible suffisamment voisine de I_n est le carré d'une matrice voisine de l'identité

DEV 2

App 36 : L'application $\exp : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Thm 37 (Inversion globale) : Soit $f : U \to F$ une application de classe C^1, injective sur U et telle que pour tout $x \in U$, $df(x)$ est inversible. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un C^1-difféomorphisme de U dans $f(U)$.

Thm 38 (Fonctions implicites) : soient U un ouvert de $E \times F$, $(a,b) \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.
On suppose que $f(a,b) = 0$ et que $d_y f(a,b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage V de a, W de b tels que $V \times W \subset U$, pour tout $(x,y) \in V \times W$ $d_y f(x,y)$ est inversible et unique application $\varphi : V \to W$ telle que

$$(x \in V,\ y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

2) Changement de variable

Ex 39 : Résolution de $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ avec changement de variables $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Thm 40 : Soient Δ et D des ouverts de $\mathbb{R}^d$, $\varphi : \Delta \to D$ un C^1-difféomorphisme
Alors pour toute fonction mesurable $f : D \to \mathbb{R}_+$,

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f(\varphi(u))\,|J\varphi|(u)\,du$$

Ex 41 : On définit pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ et $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$
Alors $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

III. Extrema

On considère $f : U \to \mathbb{R}$.

Def 42 : f admet un maximum (resp. minimum) local en a s'il existe un voisinage V de a tel que
$\forall x \in V \cap U$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$)

Def 43 : f admet un point critique en a si $df(a) = 0$.

Prop 44 : Si f est différentiable et admet un extremum local en a, alors $df(a) = 0$.

Rem 45 : La réciproque est fausse $f(x,y) = x^3 + x^2$.

Prop 46 : Si f est de classe C^2 et admet un minimum local, (resp. maximum local) en a, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $d^2 f(a)(h,h) \geq 0$ (resp. $d^2 f(a)(h,h) \leq 0$)

Thm 47 : Soient $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable, a un point critique de f. Si $Hf(a)$ est définie positive (resp. négative) alors f présente un minimum (resp. maximum) local strict en a.

Thm 48 (Multiplicateurs de Lagrange) Soient $f, g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$. Supposons que $f_{|\Gamma}$ admette un extremum local en a de Γ et $dg(a) \neq 0$. Alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d(f + \lambda g)(a) = 0$.

App 49 : Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Alors

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$