245. Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications

Cadre : Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$

I. Fonctions holomorphes

1) $\mathbb{C}$-dérivabilité et holomorphie [AM]

Définition 1 : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si la limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe. Dans ce cas, on la note $f'(a)$.
Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω, $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ est appelée la dérivée de f.

Exemple 2 :
1) $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ et sa dérivée est $z \mapsto 1$.
2) $z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point
3) Toute fonction polynomiale $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$ de dérivée $P'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$

Proposition 3 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) f est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$;
2) f est différentiable en a et $df(a)$ est une similitude directe
3) f est différentiable en a et $df(a) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire
Si les propriétés sont vérifiées, $df(a) \cdot h = f'(a) h$.

Corollaire 4 : Toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable est différentiable

Remarque 5 : La réciproque est fausse : $z \mapsto \bar{z}$ est différentiable mais pas $\mathbb{C}$-dérivable.

Corollaire 6 : Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω si et seulement si f est différentiable et vérifie les équations de Cauchy-Riemann :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{où } u = \mathrm{Re}(f),\ v = \mathrm{Im}(f).$$

Définition 7 : On dit que f est une fonction holomorphe dans Ω si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω.
On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω

2) Séries entières et fonctions analytique [Quef]

Définition 8 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est analytique sur Ω si pour tout $a \in \Omega$, il existe $\delta > 0$ et une série entière $\sum c_n(a) z^n$ de rayon $R \geq \delta$ tels que $|z - a| < \delta$ implique $z \in \Omega$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(a)(z-a)^n$.
On note $\mathcal{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

Théorème 9 : Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ de somme S, $\Omega = D(0,R)$. Alors
1) $S \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$; plus généralement,
$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}$$
2) $S \in \mathcal{A}(\Omega)$: si $a \in \Omega$ et si $|z-a| < R - |a|$, alors
$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$$

Théorème 10 : $\mathcal{A}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega)$

Exemple 11 : $\exp : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

II. Théorie de Cauchy et conséquences

1) Intégrale sur un chemin [Tau]

Définition 12 : On appelle chemin toute application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
γ est un lacet si $\gamma(a) = \gamma(b)$

Définition 13 : Deux chemins $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\delta : [c,d] \to \mathbb{C}$ sont dits équivalents s'il existe une application $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ telle que
1) φ bijective, croissante et $\mathcal{C}^1$ par morceaux
2) φ^{-1} $\mathcal{C}^1$ par morceaux
3) $\gamma = \delta \circ \varphi$.
Si γ et δ sont équivalents, on a $\mathrm{Im}(\gamma) = \mathrm{Im}(\delta)$.

Définition 14 : Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin et f une fonction continue sur $\mathrm{Im}\,\gamma$. L'intégrale de f sur γ, notée $\int_\gamma f(z)\,dz$ est définie par
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

Proposition 15 : Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\delta : [c,d] \to \mathbb{C}$ sont deux chemins équivalents et si f est une fonction continue sur $\mathrm{Im}\,\gamma$, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz$

2) Indice [Tau]

Théorème-définition 16 : Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet, $U = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$. Pour $z \in U$, on pose
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,dt$$
L'application $\begin{array}{l} U \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z) \end{array}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de U, nulle sur la composante

non bornée de U.
On dit que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est l'indice de z par rapport à γ.

Remarque 17 : Intuitivement, $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est le nombre de tours (avec un signe) décrit par $\gamma(t)$ autour de z quand t décrit $[a,b]$.

Exemple 18 : Soit γ un cercle $C(a,r)$ orienté dans le sens direct $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=0$ si $|z-a|>r$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=1$ si $|z-a|<r$.

3) Existence de primitive [Tau]

Théorème 19 : Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction continue. f possède une primitive sur Ω si, et seulement si pour tout lacet γ,
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Théorème 20 : Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction continue telle que
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$
pour tout triangle $\Delta\subset U$. Alors f possède une primitive dans Ω.

Théorème 21 (Goursat) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $w\in\Omega$ et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega\setminus\{w\}$. Pour tout triangle dans Ω, Δ,
$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)\,d\xi = 0.$$

Théorème 22 (Cauchy pour un convexe) : Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $w\in\Omega$ et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega\setminus\{w\}$. Alors f possède une primitive dans Ω, et pour tout lacet γ dans Ω, $\int_\gamma f(z)\,dz=0$

Théorème 23 (Formule de Cauchy pour un convexe) : Soient γ un lacet dans un ouvert convexe Ω de $\mathbb{C}$, $z\in\Omega\setminus\mathrm{Im}\,\gamma$ et $f\in H(\Omega)$. Alors
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)\,f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

Corollaire 24 (Formule de la moyenne) : Soient $f\in H(\Omega)$, $a\in\Omega$ $r>0$ tel que $D(a,r)\subset\Omega$.
Alors $f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$

Application 25 : Soient $a>0$ et $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{-ax^2}\end{array}$. Alors
$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

4) Analyticité des fonctions holomorphes [Tau]

Théorème 26 : Soient $a\in\Omega$ et $f\in H(\Omega)$. Alors :
1) $f\in \mathcal{A}(\Omega)$ et le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a,\mathbb{C}\setminus\Omega)$
2) Si Ω est convexe et si γ est un lacet tel que $a\notin\mathrm{Im}\,\gamma$,
$$\mathrm{Ind}_\gamma(a)\,f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi.$$

Corollaire 27 : Soit $f\in H(\Omega)$. Alors f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable.

Théorème 28 (Morera) : Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction continue. Les conditions suivantes sont équivalentes
1) $f\in H(\Omega)$
2) $f\in\mathcal{A}(\Omega)$
3) f possède localement une primitive sur Ω
4) Pour tout triangle $\Delta\subset U$, $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Corollaire 29 : Soient $w\in\Omega$ et $f\in H(\Omega\setminus\{w\})$ continue sur Ω. Alors $f\in H(\Omega)$

III. Propriété des fonctions holomorphes

1) Principe des zéros isolés [Tau] [LM]

Théorème 30 (Principe des zéros isolés) : Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f\in\mathcal{A}(\Omega)$ non identiquement nulle. L'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de Ω.

Application 31 : Soit Ω un ouvert connexe contenant 0. Il n'existe pas de fonction analytique $f\in\mathcal{A}(U)$ vérifiant
$$f\left(\tfrac{1}{n}\right)=f\left(-\tfrac{1}{n}\right)=\tfrac{1}{n}$$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ assez grand.

Théorème 32 : Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f,g\in\mathcal{A}(\Omega)$ Si f et g coïncident au voisinage d'un point de Ω, alors $f=g$.

Définition 33 : Une fonction locale est un couple (f,D) où D est un disque ouvert non vide et $f\in H(D)$.

Définition 34 : Soient (f,D) une fonction locale et $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ une courbe. Un prolongement analytique de (f,D) le long de γ est une famille de fonctions locales $(f_t,D_t)_{t\in[0,1]}$ telle

que :
a) $(f_0, D_0) = (f, D)$
b) pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est le centre de D_t
c) pour tout $t \in [0,1]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t' \in [0,1]$ vérifiant $|t - t'| < \varepsilon$, $\gamma(t') \in D_t \cap D_{t'}$ et $f_t = f_{t'}$ sur cette intersection

Théorème 35 : Soient (f, D) une fonction locale et γ un chemin tel que $\gamma(0)$ soit le centre de D. Si (f_1, D_1) et $(\tilde{f}_1, \tilde{D}_1)$ sont les éléments terminaux de deux prolongements analytique de (f, D) le long de γ, alors $f_1 = \tilde{f}_1$ sur $D_1 \cap \tilde{D}_1$.

2) Principe du maximum [Quef]

Théorème 36 (Inégalité de Cauchy) : Soient $R > 0$ et $f \in H(D(0,R))$
$\forall z \in D(0,R)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
Alors $\forall r \in]0,R[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)| \leq \frac{\sup_{|z|=r} \{|f(z)|\}}{r^n}$

Corollaire 37 (Théorème de Liouville) : Toute fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) bornée est constante.

Application 38 (Théorème de d'Alembert-Gauss) : Tout polynôme d'une variable à coefficients complexes et non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 39 : Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$, $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue sur $\bar{\Omega}$ et holomorphe sur Ω. On note $M = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$
Alors $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq M$

Proposition 40 : Avec les mêmes hypothèses, si $|f|$ atteint son maximum en $a \in \Omega$, alors f est constante sur la composante connexe de Ω qui contient a.

Application 41 : Soit $f \in H(D(0,1))$ continue sur $\bar{D}(0,1)$ telle que $|f| = 1$ sur $C(0,1)$. Alors f est constante

Lemme 42 (Schwarz) : Soient R et $M > 0$, $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(0,R)$. Alors
1) $|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$ pour tout $z \in D(0,R)$ et $|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$
2) si l'on a égalité en un point $z_0 \neq 0$ ou si $|f'(0)| = \frac{M}{R}$, alors $f(z) = uz$ où u est une constante de module $\frac{M}{R}$.

3) Convergence de suite de fonctions holomorphes [Quef] [AM]

Théorème 43 (Weierstrass) : Soit (f_n) une suite de $H(\Omega)$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers f
Alors
1) $f \in H(\Omega)$ et $f_n' \xrightarrow{uc} f'$

Théorème 44 (Holomorphie sous le signe intégral) : Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ telle que
1) pour tout $z \in \Omega$, $t \mapsto f(z,t)$ est mesurable
2) pour presque tout $t \in X$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe dans Ω
3) pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g_K \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que
$\forall (z,t) \in K \times X$, $|f(z,t)| \leq g_K(t)$
Alors $F : z \mapsto \int_X f(z,t) d\mu(t)$ définit une fonction holomorphe dans Ω. Ses dérivées s'obtiennent par dérivation sous le signe intégrale

Exemple 45 : La formule $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ définit une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \; Re(z) > 0\}$.

IV. Espaces de Bergman

Définition 46 : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On définit l'espace $H^2(\Omega)$ dit de Bergman par $H^2(\Omega) = H(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire de $L^2(\Omega)$ et de la norme associée au produit scalaire

Théorème 47 :
1) $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert
2) Si $\Omega = D(0,1)$, on définit $\forall n \in \mathbb{Z}$ $e_n : z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n$. Alors $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $H^2(\Omega)$.

Remarque 48 Si $\Omega = \mathbb{C}$, $H^2(\Omega) = \{0\}$.

Références :

[AM] Analyse complexe, Amar, Matheron
[Quef] Analyse complexe et applications, Queffélec, Queffélec
[Tau] Analyse complexe pour la licence 3, Tauvel
[LM] 131 développements pour l'oral, Lesire, Montagnon