250 : Transformation de Fourier. Applications.

Pandou

5 mai 2022

1 Transformée de Fourier L^1

1.1 Définitions

Définition 1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On définit sa transformée de Fourier par*

$$\mathcal{F}(f) : \xi \in \mathbb{R}^d \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\mathrm{d}x$$

Proposition 2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(f)$ est continue et tend vers 0 à l'infini. De plus, on a*

$$\left\|\mathcal{F}(f)\right\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}$$

Exemples 3 :

- Si $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$, alors $\mathcal{F}(f)(\xi) = 2\mathrm{sinc}(\xi)$.
- Si $f_a(x) = e^{-a\|x\|^2}$, alors $\mathcal{F}(f_a)(\xi) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a}}$.

Proposition 4. *Soit $f \in L^1$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ et $M \in GL_d(\mathbb{R})$.*

$g(x)$	$\mathcal{F}(g)(\xi)$
$f(x)e^{i\langle x,\alpha\rangle}$	$\mathcal{F}(f)(\xi-\alpha)$
$f(x+a)$	$\mathcal{F}(f)(\xi)e^{i\langle \xi,\alpha\rangle}$
$\partial^\alpha f(x)$	$i^{\lvert\alpha\rvert}\xi^\alpha\mathcal{F}(f)(\xi)$
$x^\alpha f(x)$	$\partial^\alpha\mathcal{F}(f)(\xi)$
$f(M^{-1}x)$	$\lvert\det(M)\rvert\mathcal{F}(f)\big(M^T\xi\big)$

Remarque 5 : Les deux derniers points donnent le lien entre la régularité de la transformée de Fourier et la décroissance à l'infini.

1.2 Convolution

Définition 6. *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors on définit une fonction pour presque tout x par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$.*

Proposition 7. *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.*

Proposition 8. *Le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ est associatif et commutatif. Ceci fait de $L^1(\mathbb{R}^d)$ une algèbre commutative.*

Théorème 9. *Soit $f \in \mathcal{C}^k$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact, alors $f * g \in \mathcal{C}^k$ et on a*

$$\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f) * g$$

Proposition 10. *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors*

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

Application 11 : $L^1(\mathbb{R}^n)$ n'a pas d'unité.

Définition 12. *Une approximation de l'unité est une suite de fonctions (ρ_t) intégrables telles que*

1. $\forall t > 0, \int_{\mathbb{R}^d} \rho_t = 1$.
2. $\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_t| < +\infty$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \lim_{t\to 0} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \rho_t = 0$.

On dit qu'elle est régularisante si les ρ_t sont $\mathcal{C}^\infty$.

Exemples 12 :

- $\rho_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$ est une approximation de l'unité.
- Si ρ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, alors on définit une approximation de l'unité en posant $\rho_t(x) = \frac{1}{t^d}\rho\left(\frac{x}{t}\right)$.

Théorème 13. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et (ρ_t) une approximation de l'unité, alors $\rho_t * f$ converge vers f dans L^1.*
De plus, si f est continue et bornée, il y a aussi convergence simple.

1.3 Inversion de Fourier

DEVELOPPEMENT 1

Théorème 14. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{F}(f)\big)$$

Application 15 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mathcal{F}(f) = 0$, alors $f = 0 : \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est injective.

Remarque 16 : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors f coincide presque partout avec une fonction continue. En particulier, il est possible que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, mais $\mathcal{F}(f) \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ comme le montre $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$.

2 Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$

2.1 Espace de Schwartz

Définition 17. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des fonctions u $\mathcal{C}^\infty$ telles que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C > 0, \left|x^\alpha \partial^\beta u(x)\right| \leqslant C$$

Exemple 18 :

- Toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathcal{S}$.
- $x \longmapsto e^{-\|x\|^2} \in \mathcal{S}$.

Proposition 19. *$\mathcal{S}$ est stable par dérivation et par multiplication par un polynôme et par produit.*

Proposition 20.

$$\forall 1 \leqslant p \leqslant +\infty, \mathcal{S} \subset L^p$$

Théorème 21. *$\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$. Plus précisément, son inverse est donnée par*

$$\overline{\mathcal{F}}(u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} u(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Proposition 22. *Soit $u, v \in \mathcal{S}$, on a*

1. $\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(u)v = \int_{\mathbb{R}^d} u\mathcal{F}(v)$.
2. $\int_{\mathbb{R}^d} u\overline{v} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(u)\overline{\mathcal{F}(v)}$. *En particulier, on a*
$$\|u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d}\|\mathcal{F}(u)\|_{L^2}^2$$
3. $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$ *et* $\mathcal{F}(uv) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(u) * \mathcal{F}(v)$.

Application 23 : $\mathcal{S}$ est dense dans L^2 car $\mathcal{C}_0^\infty$ est dense dans L^2, on peut donc prolonger $\mathcal{F}$ est une similitude de L^2 dans lui-même.

2.2 Distributions tempérées

Définition 24. *$\mathcal{S}'$ est l'ensemble des formes linéaires $T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ telles que*

$$\left|\langle T, \varphi\rangle\right| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k, |\beta| \leqslant \ell} \left\|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)\right\|$$

Un élément de $\mathcal{S}'$ est appelée une distribution tempérée.

Exemple 25 :

- Toute fonction localement intégrable et majorée par un polynôme définit un élément de $\mathcal{S}'$.
- $\exp \notin \mathcal{S}'$.

Proposition 26. *On a les injections suivantes, pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$*

$$L^p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$$

Proposition 27. *$\mathcal{S}'$ est stable par multiplication par un élément de $\mathcal{S}$ et par multiplication par un polynôme.*

Définition 28. *Soit (T_n) une suite de distributions tempérées et $T \in \mathcal{S}'$. On dit que (T_n) converge vers T dans $\mathcal{S}'$ si*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \lim_{n \to +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Définition 29. *Soit $T \in \mathcal{S}'$, on définit sa transformée de Fourier par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \big\langle \mathcal{F}(T), \varphi \big\rangle = \big\langle T, \mathcal{F}(\varphi) \big\rangle$$

Exemple 30 : $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$.

Théorème 31. *$\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'$ dans lui-même et $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.*

Proposition 32. *Soit $T \in \mathcal{S}'$, alors*

1. *$\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(T)$.*
2. *$\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}(T)$.*

3 Applications

3.1 Traitement du signal

Théorème 33 (Inégalité de Heisenberg)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors on a une constante $C > 0$ telle que*

$$\|xf\|_{L^2} \|\xi \mathcal{F}(f)\|_{L^2} \geqslant C \|f\|_2^2$$

Remarque 34 : Il est impossible de localiser précisément un signal en x et en spectre ξ. La meilleure approche qu'on peut avoir des deux (ie le cas d'égalité) est obtenue pour une gaussienne.

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 35 (Échantillonnage de Shannon)**.** *On note $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et*

$$BL^2 = \big\{ u \in L^2(\mathbb{R}), \mathcal{F}(u) = 0 \text{ presque partout sur } \mathbb{R} \setminus I \big\}$$

Alors,

1. *BL^2 est un sous-espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$. Et on a une injection $BL^2 \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.*
2. *Une base hilbertienne de BL^2 est $(\tau_k \mathrm{sinc})_{k \in \mathbb{Z}}$ où $\tau_k f(x) = f(x-k)$.*
3. *L'application $u \in BL^2 \longmapsto \big(u(n)\big)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie. Plus précisément, on a*
$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) \mathrm{sinc}(x-n)$$
où la convergence est L^2 et uniforme.

Remarque 36 : Pour reconstituer un signal, il suffit d'échantillonner le signal à au moins 2 fois la fréquence de la fréquence maximale du signal.

3.2 Formule de Poisson

Théorème 37 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable, on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \big|u(x)\big| \leqslant \big(1 + |x|\big)^{-2} \qquad \text{et} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}, \big|\mathcal{F}(u)(\xi)\big| \leqslant c\big(1 + |\xi|\big)^{-2}$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(x-n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(u)(n) e^{2i\pi nx}$$

Application 38 : On note pour $\sigma > 0$, $\Theta_\sigma(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi^2 k^2 \sigma^2} e^{2ik\pi x}$, alors on a

$$\Theta_\sigma(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(x-k)^2}{2\sigma^2}}$$

3.3 Résolution d'EDP

Théorème 39 (Équation des ondes)**.** *L'équation $(\partial_t^2 - \Delta_x)E = \delta_0$ admet une unique solution E dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ à support dans $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, t \geqslant 0\}$. Elle est* *donnée par*

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \langle E, \psi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{t}{4\pi} \int_{\|\omega\|=1} \psi(t, t\omega) \mathrm{d}t$$

On dit que E est la solution élémentaire de cette équation.

Théorème 40 (Équation de la chaleur)**.** *La solution élémentaire de $(\partial_t - \Delta_x)E = \delta_0$ est donnée par*

$$E = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

où H est la marche de Heaviside.

Théorème 41 (Équation de Schrödinger)**.** *La solution élémentaire de $(\partial_t - i\Delta_x)E = \delta_0$ est donnée par*

$$E = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-in\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

Remarque 42 : Pour trouver une solution dans le cas général avec un terme source $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, alors l'unique solution tempérée à support dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ est donnée par $u = f * E$.

Références :

- Bony, Théorie des distributions et analyse de Fourier.
- Rudin, Analyse complexe.
- Zuily, Éléments de distributions et équations aux dérivées partielles.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.