219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Pandou

17 mai 2022

Définition 1. *Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $a \in X$. On dit que*

1. *a est un maximum local de f s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \cap X, f(x) \leqslant f(a)$.*
2. *a est un maximum global de f si $\forall x \in X, f(x) \leqslant f(a)$.*
3. *a est un minimum local (resp. global) de f si a est un minimum local (resp. global) de $-f$.*
4. *a est un extremum local (resp. global) de f si a est un minimum ou un maximum local (resp. global) de f.*

On dit que les extrema précédents sont stricts si les inégalités précédentes sont strictes sauf pour $x = a$.

Théorème 2. *Soit K un compact et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.*

Exemple 3 : Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, si $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $y \in F$ tel que $d(x, y) = d(x, F)$.

1 Fonctions convexes

Définition 4. *Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si*

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1], f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.

Proposition 5. *$f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, $\{(x,y) \in C \times \mathbb{R}, y \geqslant f(x)\}$ est un convexe de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

Exemple 6 : Toute norme est convexe.

Théorème 7. *Soit $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, alors f est continue sur $\mathring{C}$ et dérivable dans toutes les directions.*

Proposition 8. *Soit C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur C. On a équivalence entre :*

1. *f est convexe.*
2. *$\forall x, y \in C, f(y) \geqslant f(x) + \big\langle \nabla f(x), y - x \big\rangle$.*
3. *$\forall x, y \in C, \big\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \big\rangle \geqslant 0$.*
4. *Si f est en plus deux fois différentiable, alors $\forall x \in C, \mathrm{d}^2 f(x) \geqslant 0$.*

Exemple 9 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $x \longmapsto \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$ est convexe si, et seulement si, $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Proposition 10. *Si f est convexe, alors tout minimum local est global.*

Proposition 11. *Soit C un convexe et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe, alors f a au plus un minimum sur C. Si de plus, C est non borné et $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \big|f(x)\big| = +\infty$, alors f admet un unique minimum sur C.*

Exemple 12 : Soit (x_1, x_2, x_3) trois points non alignés, alors $x \longmapsto \|x - x_1\| + \|x - x_2\| + \|x - x_3\|$ a un unique minimum.

Exemple 13 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Phi(X) = \dfrac{1}{2}X^T A X - B^T X$ admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 14. *On suppose que f est $\mathcal{C}^1$ et α-convexe, ie $f(y) \geqslant f(x) + \big\langle \nabla f(x), y - x \big\rangle + \dfrac{\alpha}{2}\|y - x\|^2$, alors f admet un unique minimum x^* sur $\mathbb{R}^n$.*
Si (u_n) est une suite minimisante ie telle que $\lim f(u_n) = f(x^*)$, alors (u_n) converge vers x^*.

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 15 (Kantorovitch). *Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $x \neq 0$, on a*

$$\frac{\|x\|^4}{\|x\|_{A^{-1}}^2\|x\|_A^2} \geqslant 4\frac{\lambda_{\max}\lambda_{\min}}{(\lambda_{\max}+\lambda_{\min})^2}$$

Théorème 16. *Soit $\Phi(x) = \frac{1}{2}x^TAx - x^Tb$ avec $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $\overline{x}$ l'unique minimum de Φ. On définit $x_0 \neq \overline{x}$ et on pose $\alpha_k = \frac{\|\nabla\Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\Phi(x_k)\|_A^2}$ et $x_{k+1} = x_k - \alpha_k\nabla\Phi(x_k)$. Alors,*

1. *(x_k) converge vers $\overline{x}$.*
2. *On a l'estimation de la vitesse de convergence :*

$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}\left(\frac{\lambda_{\max}-\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}+\lambda_{\min}}\right)^{k+1}\|x_0 - \overline{x}\|$$

3. *Soit (x_k) est stationnaire au rang 1, soit on a $x_k \neq x_{k+1}$ pour tout k.*

2 Optimisation dans un Hilbert

Théorème 17. *Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H, alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $a \in C$ tel que*

$$\|x - a\| = d(x, C)$$

On note $a = p_C(x)$ et ce point est caractérisé par

$$a \in C \qquad \text{et} \qquad \forall y \in C, \mathrm{Re}\big(\langle x-a, y-a\rangle\big) \leqslant 0$$

Corollaire 18. *p_C est une application 1-lipschitzienne donc continue. De plus, si C est un sous-espace fermé de H, alors p_C est linéaire.*

Proposition 19. *Soit F un sous-espace de H, alors*

$$H = \overline{F} \oplus F^\perp$$

En particulier, F est dense si, et seulement si, $F^\perp = 0$.

Théorème 20 (Représentation de Riesz). *L'application $x \in H \longmapsto \big(y \in H \mapsto \langle x, y\rangle\big) \in H'$ est une isométrie surjective.*

Définition 21. *Soit $b : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, on dit qu'elle est coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall u \in H, a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|^2$.*

Théorème 22. *Soit $b : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive, alors il existe un opérateur T continu sur H tel que $\forall x, y \in H, b(x,y) = \langle Tx, y\rangle$.*

Corollaire 23 (Théorème de Lax-Milgram). *Soit $b : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive et ℓ une forme linéaire continue sur H, alors il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall y \in H, b(u,y) = \ell(y)$.*
De plus, si a est symétrique, on note $E(x) = \frac{1}{2}b(x,x) - \ell(x)$ et alors u est caractérisé par

$$E(u) = \min_{x \in H} E(x)$$

Remarque 24 : Ce théorème permet de montrer l'existence et l'unicité des solutions à une EDP.

3 Harmonicité et holomorphie

3.1 Fonctions holomorphes

Définition 25. *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, on note $f'(a)$ cette limite.*
On dit que f est holomorphe sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et de dérivée continue sur Ω.

Théorème 26 (Cauchy). *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et C un cercle de rayon R et de centre a, alors pour tout point $z \in \mathring{C}$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,R)}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

Corollaire 27. *Une fonction holomorphe est analytique.*

Théorème 28 (Prolongement analytique). *Soit Ω un connexe et f, g deux fonctions holomorphes sur Ω qui coincident sur un ouvert non vide de Ω, alors $f = g$ sur Ω.*

Théorème 29 (Principe du maximum). *Soit f une fonction holomorphe telle que $|f|$ admet un maximum local dans Ω, alors f est constante.*

Lemme 30 (de Schwarz). *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leqslant 1$. Alors,*

1. *$\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leqslant |z|$ et $|f'(0)| \leqslant 1$.*
2. *Si on a égalité dans une des inégalités précédentes, alors il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ telle que $\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \lambda z$.*

Théorème 31 (Automorphismes de $\mathbb{D}$). *Soit $a \in \mathbb{D}$ et $\lambda \in \mathbb{U}$, on note $\varphi_{a,\lambda}(z) = \lambda\frac{a-z}{1-\overline{a}z}$. Alors,*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{\varphi_{a,\lambda}, a \in \mathbb{D}, \lambda \in \mathbb{U}\}$$

3.2 Fonctions harmoniques

Définition 32. *On dit que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est harmonique si u est $\mathcal{C}^2$ et $\Delta u = 0$.*

Exemple 33 :
- $x \longmapsto \log\big(|x|\big)$ est harmonique sur $\mathbb{C}^*$.
- Toute fonction holomorphe est harmonique.
- Si f est harmonique et ne s'annule pas, $\log|f|$ est harmonique.
- $z \longmapsto |z|$ n'est pas harmonique.

Proposition 34. *Soit f une fonction holomorphe et u harmonique, alors $u \circ f$ est harmonique.*

Remarque 35 : En particulier, si f est une transformation orthogonale, alors $u \circ f$ est harmonique.

Lemme 36. *Soit u une fonction $\mathcal{C}^1$ et f holomorphe sur un connexe Ω, alors on a équivalence entre*

1. $\mathrm{Re}(f) - u$ *est constante.*
2. $f' = 2\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Corollaire 37. *Si Ω est convexe, alors toute fonction harmonique sur Ω est la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

Corollaire 38. *Soit D un disque ouvert centré en 0, alors $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est harmonique si, et seulement si, elle est de la forme*

$$u(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \overline{z}^n$$

où la convergence a lieu sur tout compact de D.

Théorème 39. *Soit u une fonction harmonique sur un voisinage de $\overline{D(z_0, r)}$, alors on a la propriété de la moyenne*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

Proposition 40 (Principe du maximum)**.** *Soit u une fonction harmonique sur un ouvert connexe, si $|u|$ admet un maximum local, alors u est constante.*

4 Fonctions lisses

4.1 Extrema sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 41. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que $a \in U$ est un point critique de f si $\mathrm{d}f(a) = 0$.*

Proposition 42. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si a est un extremum local de f, alors a est un point critique de f.*

Remarque 43 : Le résultat est faux si U n'est plus un ouvert. On en déduit en particulier une méthode pour étudier les points critiques sur une partie X :
- Recherche de candidats de points extremaux sur $\mathring{X}$ en trouvant les points critiques.
- Étudier ce qui se passe sur $\mathrm{Fr}(X)$, par exemple en le paramétrant et on se ramène à un problème de plus petite dimension.

Remarque 44 : La réciproque est fausse : $x \longmapsto x^3$.

Application 45 : Soit $f : \overline{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ où U est un ouvert relativement compacte, on suppose que f est différentiable sur U et nulle sur $\mathrm{Fr}(U)$, alors il existe $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Théorème 46. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.*

1. *Si f présente un minimum local en $a \in U$, alors $\mathrm{d}^2 f(a) \geqslant 0$.*
2. *Si $a \in U$ est un point critique de f tel que $\mathrm{d}^2 f(a) > 0$, alors a est un minimum local strict de f.*

Remarque 47 : $(x, y) \longmapsto x^4 + y^4$ a un minimum global strict en 0, mais sa différentielle seconde en 0 est 0.

Exemple 48 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et a un point critique de f, on note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \qquad \text{et} \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

- Si $rt - s^2 > 0$, alors a est un minimum (resp. un maximum) local de f si $r > 0$ (resp. $r < 0$).
- Si $rt - s^2 < 0$, alors a n'est pas un extremum de f : on dit que a est un point-selle.
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

Lemme 49. *Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\varphi : V \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que*

$$\forall M \in V, \varphi(M) = M^T A_0 M$$

Théorème 50 (Lemme de Morse)**.** *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, on suppose que 0 est un point critique de f et que $\mathrm{d}^2 f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$, alors il existe un difféomorphisme φ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi(0) = 0$ tel que*

$$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \ldots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \ldots - \varphi_n(x)^2$$

Application 51 : Les points critiques non dégénérés d'une fonction $\mathcal{C}^3$ sont isolés.

4.2 Optimisation sous contrainte

Définition 52. *On dit que $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}^n$, V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $f : U \longrightarrow V$ tel que*

$$f(U \cap M) = V \cap \left(\mathbb{R}^p \times \{0\}\right)$$

Théorème 53. *Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. On a équivalence entre :*

1. *M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ (ie f est $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}g(x)$ est surjective pour tout x) tels que $U \cap M = f^{-1}(0)$.*
3. *Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et une immersion $h : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (ie h est $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{d}h(x)$ est injective pour tout x) tels que h est un homéomorphisme entre V et $U \cap M$. On dit que h est une paramétrisation locale de M.*
4. *Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a^1, ..., a^p)$ et une application $G : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $U \cap M$ soit le graphe de G.*

Exemple 54 :

- **Par une submersion.** $\mathbb{S}^n = \left\{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0^2 + ... + x_n^2 = 1\right\}$ est une sous-variété de dimension n.
- **Par une immersion.**

$$\mathbb{T}^n = \left\{(x_1, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}, x_1^2 + x_2^2 - 1 = ... = x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 - 1 = 0\right\}$$

  est une sous-variété de dimension n.

Définition 55. *On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est tangent à $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.*
On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M.

Théorème 56. *Soit M une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$, alors T_xM est un espace vectoriel de dimension p.*

Corollaire 57. *Soit M une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$.*

- *Si g est une submersion définie sur un voisinage U de x telle que $U \cap M = g^{-1}\big(g(x)\big)$, alors $T_xM = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{d}g(x)\big)$.*
- *Si f est une paramétrisation locale de M en x, alors $T_xM = \mathrm{Im}\big(\mathrm{d}f(x)\big)$.*

Lemme 58. *Soit $a, b_1, ..., b_k$ des formes linéaires sur un espace E de dimension n tel que $(b_1, ..., b_k)$ est libre tel que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(b_i) \subset \mathrm{Ker}(a)$, alors $a \in \mathrm{Vect}(b_1, ..., b_k)$.*

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 59. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la contrainte*

$$M = \{\omega \in U, g_1(\omega) = ... = g_k(\omega) = 0\}$$

où les g_i sont des fonctions $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in M$, $\big(\mathrm{d}g_1(x), ..., \mathrm{d}g_k(x)\big)$ est libre. On suppose que $f_{|M}$ admet un extremum local en $x \in M$, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathrm{d}g_i(x)$$

Application 60 : Tout endomorphisme auto-adjoint admet au moins un vecteur propre.

Application 61 : On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique, alors

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in SL_n(\mathbb{R}), \|M\| \text{ est minimal}\}$$

Références :

- Amar, Matheron, Analyse complexe.
- Back, Malick, Peyré, Objection agrégation.
- Gourdon, Analyse.
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Tauvel, Analyse complexe.