208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Pandou

14 mai 2022

On fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé (dès qu'on aura défini ce que cela signifie).

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Normes

Définition 1. *Une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

1. $N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3. $\forall x, y \in E, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Le couple (E, N) est un espace normé.

Exemples 2 : Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.
- $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ définit une norme.
- $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ définit une norme.

Proposition 3. *Un espace normé (E, N) est muni d'une topologie d'espace métrique pour la distance $d : (x, y) \in E^2 \longmapsto \|x - y\|$.*

Proposition 4. *Les opérations $(x, y) \longmapsto x + y$ et $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ sont continues sur un espace normé.*

Corollaire 5. *Si V est un sous-espace vectoriel de E, alors son adhérence $\overline{V}$ est encore un sous-espace de E. En particulier, un hyperplan est soit fermé, soit dense dans E.*

Théorème 6 (Hölder)**.** *Soit $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors si $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \geqslant 0$, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Corollaire 7. *Si $p \geqslant 1$ et si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 8. *Soit N_1 et N_2 deux normes sur E, on dit que*

1. *N_1 est plus fine que N_2 s'il existe $k > 0$ tel que $N_2 \leqslant k N_1$.*
2. *N_1 et N_2 sont équivalentes si N_1 est plus fine que N_2 et si N_2 est plus fine que N_1.*
3. *N_1 est strictement plus fine que N_2 si N_1 est plus fine que N_2, mais qu'elles ne sont pas équivalentes.*

Exemple 9 :

- Si E est de dimension finie, alors $\|\cdot\|_\infty$ est la norme la plus fine de toutes.
- On note $E = \mathcal{C}^0([0,1])$, on définit $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ et $\|f\|_\infty = \sup |f|$, alors $\|\cdot\|_\infty$ est strictement plus fine que $\|\cdot\|_1$.

Remarque 10 : Deux normes ne sont pas toujours comparables. Par exemple, sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $N_1(P) = \max |a_k|$ et $N_2(P) = \sum\limits_k \frac{|a_k|}{k+1}$.

1.2 Continuité des applications linéaires

Théorème 11. *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont normés. On a équivalence entre :*

1. *f est continue sur E.*
2. *f est continue en 0.*
3. *f est bornée sur $\overline{B(0,1)}$.*
4. *f est lipschitzienne.*
5. *Il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant M\|x\|$.*
6. *f est uniformément continue.*

Proposition 12. *Soit N_1 et N_2 deux normes sur E, alors N_1 est plus fine que N_2 si, et seulement si, $\iota : x \in (E, N_1) \longmapsto x \in (E, N_2)$ est continue.*

Corollaire 13. *Deux normes sont équivalentes si, et seulement si, elles définissent la même topologie sur E.*

Remarque 14 :
- Dans la pratique, on utilise souvent le critère 5..
- Une application multilinéaire $f : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$ est continue si, et seulement s'il existe $M > 0$ tel que
$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in E_1 \times ... \times E_n, \|f(x)\| \leqslant M\|x_1\|...\|x_n\|$$

Remarque 15 : Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors il existe une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que X^n converge vers Q pour cette norme.

Définition 16. *L'espace des applications linéaires continues entre E et F est notée $\mathcal{L}_c(E,F)$. C'est un espace normé pour la norme*
$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$
appelée norme d'opérateur.

Remarque 17 : Le réel $\|f\|$ est la plus meilleure constante M du théorème 10., mais elle n'est pas nécessairement atteinte.

Exemple 18 : Il n'existe aucune norme sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qui rend la dérivation continue.

Proposition 19. *Soit f, g deux applications linéaires continues, alors $\|g \circ f\| \leqslant \|g\|\|f\|$.*

Proposition 20. *Une forme linéaire u sur un espace normé E est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.*

Remarque 21 : On munit $\mathcal{C}^0([0,1])$ de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$, alors la forme linéaire d'évaluation $f \longmapsto f(0)$ n'est pas continue.

Définition 22. *Pour une norme sur $\mathbb{R}^n$, on a une norme d'opérateur sur $M_n(\mathbb{R})$.*

Exemple 23 : Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$.

Norme sur $\mathbb{R}^n$	Norme subordonnée
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|$	$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^n \|a_{i,j}\|$
$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n \|x_i\|$	$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n \|a_{i,j}\|$
$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\rho(AA^T)}$

où $\rho(M) = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} |\lambda|$ est le rayon spectral de M.

1.3 Le cas de la dimension finie

Théorème 24 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Tout segment de $\mathbb{R}$ est compact.*

Corollaire 25. *Tout pavé fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est compact.*

Théorème 26 (Équivalence des normes)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace normé de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Remarque 27 : Sur un $\mathbb{R}$-espace normé de dimension finie, il n'y a qu'une seule topologie d'espace normé.

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 28. *Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et V un sous-espace de E de dimension finie, alors il existe un segment $I \subset \mathbb{R}$ telle que $\|f\|_I := \sup_{t\in I} |f(t)|$ est une norme sur V.*

Théorème 29. *Soit $f \in E$, on note V_f le sous-espace de E engendré par les translatés de f, alors V_f est de dimension finie si, et seulement si, f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.*

Théorème 30. *Si E est de dimension finie, alors une partie X de E est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.*

Théorème 31. *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire est continue : $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$.*

Théorème 32 (Riesz)**.** *E est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité fermée de E est compacte.*

2 Espaces de Banach

2.1 Complétude

Définition 33. *Soit (x_n) une suite d'éléments de E, on dit que (x_n) est une suite de Cauchy si*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, \|x_p - x_q\| \leqslant \varepsilon$$
On dit que E est un espace de Banach si toute suite de Cauchy est convergente.

Exemple 34 :
- $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.
- $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas un espace de Banach.

Proposition 35. *Toute suite convergente est de Cauchy et toute suite de Cauchy est bornée.*

Corollaire 36. *Si E est de dimension finie, alors E est un espace de Banach.*

Proposition 37. *Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.*

Corollaire 38. *$E^* = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ est toujours un espace de Banach.*

Théorème 39. *Soit E un espace normé, alors E est un espace de Banach si, et seulement si, toute série $\sum u_n$ absolument convergente (ie telle que $\sum \|u_n\|$ converge) est convergente.*

Application 40 : (Théorème de Riesz-Fischer) On rappelle que L^p est l'espace des fonctions f telles que f^p est intégrable quotienté par la relation d'égalité presque partout. On munit L^p de la norme $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
Alors, L^p est un espace de Banach.

Application 41 : Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon $R > 0$, alors si $\|u\| < R$, on définit un endomorphisme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$.

- Si $u \in \mathcal{L}_c(E)$, l'exponentielle de u est bien définie : $\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n$.
- Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$, alors si $\|u\| < 1$, il existe une racine carrée continue de $\mathrm{Id} + u$.

Proposition 42. *Soit E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|u\| < 1$, alors $\mathrm{Id} - u$ est inversible et*

$$(\mathrm{Id} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$$

Application 43 : On note $GL_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles continus tels que u^{-1} est continu, alors $GL_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 44. *Soit E un espace de Banach et K une partie de E. On a équivalence entre :*

1. *K est compact.*
2. *K est fermé, borné et plat, ie pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace F de dimension finie tel que $K \subset F + B(0, \varepsilon)$.*

Application 45 : (Théorème d'Ascoli) Soit $\mathcal{A}$ une partie fermée, bornée et équicontinue de $\mathcal{C}^0(K)$ avec K est compact, alors $\mathcal{A}$ est compact dans $\mathcal{C}^0(K)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème 46 (Prolongement)**.** *Soit E et F deux espaces normés tel que F est un espace de Banach. Soit D une partie dense dans E et $f : A \longrightarrow F$ une application uniformément continue. Alors, il existe une unique fonction $g : E \longrightarrow F$ uniformément continue telle que $g_{|A} = f$.*

Application 47 : La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2$ se prolonge en un opérateur sur L^2.

Théorème 48 (Point fixe)**.** *Soit E un espace de Banach et F une partie fermée de E et $f : F \longrightarrow F$ contractante, ie il existe $k < 1$ tel que $\forall x, y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$, alors f a un unique point fixe dans F.*
De plus, si $x \in F$, alors la suite $\left(f^n(x)\right)_n$ converge vers ce point fixe.

2.2 Théorème de Baire

Théorème 49 (Baire)**.** *Soit E un espace de Banach, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses de E est dense dans E.*

Remarque 50 : Cette définition est équivalente au fait qu'une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Application 51 : Un espace normé à base dénombrable n'est jamais complet. En particulier, $\mathbb{R}[X]$ n'est jamais complet pour aucune norme.

DEVELOPPEMENT 2

Théorème 52 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit E un espace de Banach et F un espace normé, soit H une partie de $\mathcal{L}_c(E, F)$, alors on a l'alternative*

1. *$\left(\|f\|\right)_{f \in H}$ est bornée.*
2. *Il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$.*

Application 53 : Il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et 2π-périodique, on note $c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt} \mathrm{d}t$ et on pose

$$\ell_n : f \in \mathcal{C}_{2\pi} \longmapsto \sum_{p=-n}^{n} c_p(f) \in \mathbb{C}$$

Alors, $\lim_{n \to +\infty} \|\ell_n\| = +\infty$.

Application 54 : Une limite simple d'opérateurs linéaires continus est un opérateur linéaire continu.

Application 55 : Si (E, N_1) et (E, N_2) sont deux espaces de Banach, avec N_1 plus fine que N_2, alors N_1 est équivalente à N_2.

Théorème 56 (Application ouverte)**.** *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu surjective entre deux espaces de Banach, alors T est une application ouverte, ie l'image de tout ouvert par T est ouvert.*

Corollaire 57. *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire continu bijectif entre deux espaces de Banach, alors T^{-1} est continu.*

Si vraiment on a la foi, on peut ajouter une partie sur les espaces de Hilbert, mais j'ai décidé de faire plus de places pour les espaces normés en général.

Références :

- FGN, Analyse 3.
- Gourdon, Analyse.
- Hauchecorne, Contre-exemples en mathématiques.
- Hirsch-Lacombe, Analyse fonctionnelle (pour les espaces de Hilbert).
- Pommellet, Cours d'analyse.
- Zuily, Quéffelec, Analyse pour l'agrégation.