153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Pandou

12 mai 2022

On fixe E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1 Polynômes d'endomorphismes

1.1 Polynôme minimal

Définition 1. *On a un morphisme d'algèbres $\Psi : P \in K[X] \longmapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$ qui envoie X sur u.*
Le noyau de Ψ est appelé idéal annulateur de u, son image est noté $K[u]$.

Remarque 2 : Comme E est de dimension finie, Ψ n'est jamais injectif. En dimension infinie, il est possible que u n'ait pas de polynôme annulateur.
De même, Ψ n'est jamais surjectif, sauf si $n \leqslant 1$.

Définition 3. *Le générateur unitaire de $\mathrm{Ker}(\Psi)$, noté μ_u est appelé polynôme minimal de u.*

Proposition 4.

$$\dim\big(K[u]\big) = \deg(\mu_u)$$

Et la famille $(\mathrm{Id}, u, ..., u^{\deg(\mu_u)-1})$ est une base de $K[u]$.

Remarque 5 : Soit $A \in M_n(K)$, le polynôme minimal de A est le polynôme minimal d'un endomorphisme que A représente.

Proposition 6. *Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.*

Remarque 7 : La réciproque est fausse. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors les deux matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ont pour polynôme minimal X^2, mais ne sont pas semblables.

Proposition 8. *Soit F un sous-espace stable par u, alors $\mu_{u_{|F}}$ divise μ_u.*

Proposition 9. *Les racines de μ_u sont exactement les valeurs propres de u.*

Corollaire 10. *Si P est un polynôme annulateur de u, alors les valeurs propres de u font partie des racines de P.*

Application 11 : Si u est inversible, alors u^{-1} est un polynôme en u.

Théorème 12. *Soit L/K une extension de corps et $A \in M_n(K)$, alors le polynôme minimal de A dans L est le polynôme minimal de A dans K.*

1.2 Polynôme caractéristique

Définition 13. *Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = \det(X\mathrm{Id} - u)$.*

Remarque 14 : Le polynôme caractéristique d'une matrice A est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme que A représente.

Exemple 15 :
- En dimension 2, on a $\chi_u(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(u)X + \det(u)$.
- Si u est nilpotent, alors $\chi_u = X^n$.

Proposition 16. *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.*

Remarque 17 : La réciproque est fausse. L'exemple de la remarque 7 donne un contre-exemple.

Proposition 18. *μ_u et χ_u ont les mêmes racines.*

DEVELOPPEMENT 1

Lemme 19. *Soit $A \in M_n(K)$.*

$$\chi'_A(X) = \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Com}(XI_n - A)\big)$$

Théorème 20. *Soit $A \in M_n(K)$, on pose $B_0 = I_n$ et $B_k = AB_{k-1} - \frac{\mathrm{Tr}(AB_{k-1})}{k} I_n$, alors*

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(AB_0)X^{n-1} - \frac{\mathrm{Tr}(AB_1)}{2}X^{n-2} - \ldots - \frac{\mathrm{Tr}(AB_{n-1})}{n}$$

Remarque 21 : Cette méthode de calcul permet de calculer le polynôme caractéristique en $O(n^4)$.

Proposition 22. *Soit F un sous-espace stable par u, alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.*

1.3 Sous-espaces stables

Théorème 23 (Lemme des noyaux)**.** *Soit $P = Q_1 \ldots Q_r \in K[X]$ avec Q_i deux à deux premiers entre eux, alors*

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(Q_i(u)\big)$$

Application 24 : Soit (u_n) une suite qui vérifie une relation de récurrence $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_p u_{n-p}$. L'équation $x^p - a_1 x^{p-1} - \ldots - a_p = 0$ est appelée équation caractéristique de la récurrence. On note $r_1, \ldots, r_q$ ses solutions et $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ leur ordre de multiplicité. Alors, il existe $P_1, \ldots, P_q \in K[X]$ tel que

$$u_n = P_1(n) r_1^n + \ldots + P_q(n) r_q^n$$

avec $\deg(P_i) < \alpha_i$.
On a un résultat absolument similaire pour les équation différentielle linéaire homogènes à coefficients constants.

Définition 25. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on définit les sous-espaces propres et caractéristiques associés à la valeur propre λ par :*

$$E_u(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \qquad \text{et} \qquad E'_u(\lambda) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}\big((u - \lambda\mathrm{Id})^n\big)$$

Proposition 26. *On note m_λ la multiplicité de λ comme racine de χ_u, alors*

$$\dim\big(E_u(\lambda)\big) \leqslant m_\lambda$$

Proposition 27. *Les sous-espaces propres et caractéristiques de u sont stables par u.*

Définition 28. *Soit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, alors sa matrice compagnon est $C_P =$*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Proposition 29. *Soit $P \in K_n[X]$ unitaire, alors $\chi_{C_P} = \mu_{C_P} = P$.*

Théorème 30 (Cayley-Hamilton)**.**

$$\chi_u(u) = 0$$

Corollaire 31.

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E'_u(\lambda)$$

2 Réduction des endomorphismes

2.1 Diagonalisation

Définition 32. *On dit que u est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Théorème 33. *On a équivalence entre :*

1. *u est diagonalisable.*
2. *μ_u est scindé à racines simples.*

3. *u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.*
4. $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.
5. $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), m_\lambda = \dim\big(E_u(\lambda)\big)$.

Corollaire 34. *Si u a n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.*

Remarque 35 : La réciproque est bien sûr fausse : I_n n'a qu'une seule valeur propre.

Application 36 : Dans $\mathbb{F}_q$, u est diagonalisable si, et seulement si, $u^q = u$.

2.2 Trigonalisation

Définition 37. *On dit que u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire.*

Proposition 38. *On a équivalence entre :*

1. *u est trigonalisable.*
2. *χ_u est scindé.*
3. *u est annulé par un polynôme scindé.*

Corollaire 39. *Si K est algébriquement clos, u est trigonalisable.*

Proposition 40. *L'ensemble des matrices diagonalisables (à valeurs propres distinctes) est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Application 41 : $u \longmapsto \mu_u$ n'est pas continue.

Théorème 42. *Si u et v sont deux endomorphismes diagonalisables qui commutent, alors elles sont diagonalisables dans une même base.*

2.3 Décomposition de Dunford

Théorème 43. *On suppose que χ_u est scindé, alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tels que*

1. *d est diagonalisable, n est nilpotente.*
2. $d \circ n = n \circ d$.
3. $u = d + n$.

De plus, d et n sont des polynômes en u.

DEVELOPPEMENT 2

Proposition 44. *Si $x \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathrm{ad}(x) : y \in \mathcal{L}(E) \longmapsto [x, y]$. Alors, on a équivalence entre :*

1. *x est diagonalisable (resp. nilpotent).*
2. *$\mathrm{ad}(x)$ est diagonalisable (resp. nilpotent).*

Théorème 45. *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ telle que le seul élément nilpotent de $\mathcal{A}$ est 0, alors tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont diagonalisables dans une même base.*

Définition 46. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit* $\exp(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} A^k$.

Proposition 47. *Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, on a*

1. *Si A et B commutent, alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.*
2. *$\exp(A)$ est un polynôme en A.*
3. $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.
4. *$\exp$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$.*

Proposition 48. *A est diagonalisable si, et seulement si, e^A est diagonalisable.*

Exemple 49 : Pour calculer e^A, on peut procéder de la façon suivante :

1. Écrire et factoriser χ_A.
2. Écrire une relation de Bézout entre les facteurs de χ_A.
3. En déduire les projecteurs spectraux π_λ.
4. On en déduit que $D = \sum_\lambda \lambda \pi_\lambda$.

Références :

- Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation.
- Cognet, Algèbre linéaire.
- Gourdon, Algèbre.
- Grifone, Algèbre linéaire.