Leçons : 101 : Groupe opérant sur un ensemble
104 : Groupes finis. Exemples et applications
105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini
107 : Représentations et caractères
109 : Représentations de groupes finis de petit cardinal
183 : Utilisation des groupes en géométrie.

Table des caractères de S_4

33

Références :
Audin "Géométrie"
Fulton-Harris "Representation Theory"

	1 {id}	6 transpositions	3 doubles-transpositions	8 3-cycles	6 4-cycles
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_S	3	1	-1	0	-1
$\chi_\varepsilon \chi_S$	3	-1	-1	0	1
χ_V	2	0	2	-1	0

preuve :
- les classes de conjugaison de S_4 sont connues ainsi que leurs cardinaux
- χ_1 est le caractère trivial et χ_ε est le caractère induit par la signature : on sait remplir les deux premières lignes
- Réalisons maintenant S_4 comme groupe d'isométrie du tétraèdre pour construire χ_S

① <u>lemme 1</u> : Soit T un tétraèdre régulier de l'espace affine euclidien
Alors $\mathrm{Isom}(T) \simeq S_4$

<u>preuve du lemme 1</u> : on note $S = \{A, B, C, D\}$ l'ensemble des sommets de T

Soit $f \in \mathrm{Isom}(T)$. Alors $\forall M \in S, T(M) \in S$ car S est l'ensemble des points extrémaux du convexe T et une application affine conserve les barycentres.
On définit $\Psi : \begin{cases} \mathrm{Isom}(T) \longrightarrow \mathfrak{S}(S) \simeq S_4 \\ f \longmapsto f_{|S} \end{cases}$. Ψ est bien défini car $f_{|S}$ est une bijection de S (injection et S de cardinal fini)

- Ψ est un morphisme de groupes : ok
- Ψ est injective : si $\Psi(f) = id_S$, alors comme f est uniquement déterminée par les images d'une base affine, $f = id$
- Ψ est surjective : il suffit de prouver que $\mathrm{Im}\,\Psi$ contient les transpositions qui engendrent S_4. Soit f la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de $[CD]$. Alors $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = D$, $f(D) = C$
D'où $\Psi(f)$ est la transposition (C, D) □

On obtient ainsi une réalisation $S_4 \hookrightarrow O_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_3(\mathbb{C})$
en remarquant qu'une application affine qui échange les sommets de T est une isométrie (elle fixe O car elle fixe les barycentres)

② Etude du caractère associé à $S_4 \hookrightarrow GL_3(\mathbb{C})$

- transpositions : c'est une symétrie par rapport à un plan, de trace 1
- bi-transpositions : c'est une symétrie par rapport à une droite, de trace -1
- 3-cycles : c'est une rotation d'axe une hauteur du tétraèdre et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de trace $1+2\cos\frac{2\pi}{3} = 0$
- 4 cycles : par exemple (A,B,C,D). Ecrivons la matrice de l'isométrie associée dans la base $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ où $O = \frac{A+B+C+D}{4}$ est un point fixe de f avec $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ de trace -1 (c'est une symétrie rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ ...)

- Irréductibilité : $\langle \chi_S, \chi_S \rangle = \frac{1}{24}\left[1\times 3^2 + 6\times 1^2 + 3\times(-1)^2 + 8\times 0^2 + 6\times(-1)^2\right] = 1$

③ On complète une autre ligne avec le caractère tordu par la signature $\chi_\varepsilon \cdot \chi_S$

④ On complète la dernière ligne : ... caractère χ_V associé à une représentation de dimension α avec $1^2+1^2+3^2+3^2+\alpha^2 = 24$ ie $\alpha = 2$
puis on utilise l'orthogonalité avec la première colonne.