leçons
207 : prolongement de fonctions
243 : convergence des séries entières
244 : fonctions développables en série entières

Théorème des lacunes d'Hadamard

20

Référence : Amar – Matheron p. 110 – 111

Thm : Soit $S = \sum c_n z^{p_n}$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose que (p_n) est lacunaire (ie $\exists c > 1 \ \forall n \geq 0 \ p_{n+1} \geq c p_n$, $p_0 \neq 0$)
Alors tous les points du cercle S^1 sont singuliers pour S
(ie $\forall \xi \in S^1$, $\forall \Omega$ voisinage de $D(0,1) \cup \{\xi\}$ dans $\mathbb{C}$,
$f : z \mapsto \sum_{n \geq 0} c_n z^{p_n}$ ne se prolonge pas en une fonction holomorphe sur Ω)

preuve :

① MQ il suffit de prouver (P) : $\forall S$, (S lacunaire $\Rightarrow$ 1 est singulier pour S)

- Supposons (P) vraie.
Soit S lacunaire et $e^{i\theta} \in S^1$. On pose $\tilde{S} = \sum \tilde{c}_n z^{p_n}$ avec $\tilde{c}_n = c_n e^{i p_n \theta}$
$\tilde{S}$ est lacunaire de rayon de convergence 1 donc 1 est singulier pour $\tilde{S}$.
D'où $e^{i\theta}$ est singulier pour S. □

Dans la suite, on fixe $S = \sum c_n z^{p_n}$ lacunaire de rayon de convergence R égal à 1 et on suppose que 1 n'est pas singulier pour S.
Ainsi, il existe Ω voisinage de $D(0,1) \cup \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ et $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe qui prolonge $f : \begin{cases} D(0,1) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n \geq 0} c_n z^{p_n} \end{cases}$. On va obtenir une contradiction avec le fait que R=1

② Soit $c > 1$ tel que $\forall n \geq 0 \quad p_{n+1} \geq c p_n$
La suite $\left(\frac{M+1}{M}\right)_{M \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 1 donc il existe $M \in \mathbb{N}^* \mid \forall n \geq 0 \ M p_{n+1} \geq (M+1) p_n$

- On pose $Q(X) = \dfrac{X^M + X^{M+1}}{2} \in \mathbb{C}[X]$

MQ $\forall z \in \overline{D(0,1)} \setminus \{1\} \quad |Q(z)| < 1$

Soit $z \in \overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$, $|Q(z)| \leq \dfrac{|z|^M + |z|^{M+1}}{2} \leq 1$
Si $|Q(z)| = 1$, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire et z^M et z^{M+1} sont positivement liés de module 1 ; $\exists \lambda \geq 0 \quad z^{M+1} = \lambda z^M$
$\exists \lambda \geq 0 \ \lambda = z$

D'où $z = 1$. Absurde

③ On pose $F : \begin{cases} D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C} \\ w \longmapsto f(Q(w)) \end{cases}$. F est holomorphe comme composée de deux fonctions holomorphes.

F est donc la somme d'une série entière $\sum_{m \geq 0} b_m w^m$ de rayon de convergence $R' \geq 1$.

$$\forall w \in D(0,1) \quad \sum_{m\geq 0} b_m w^m = \sum_{n \geq 0} c_n Q(w)^{p_n}$$
$$= \sum_{n\geq 0} \underbrace{c_n \frac{1}{2^{p_n}} \left(w^{Mp_n} + \dots + w^{(M+1)p_n}\right)}_{\text{paquet } D_n}$$

$\forall n \geq 0 \quad M p_{n+1} > (M+1) p_n$ donc les puissances de w ne se mélangent pas dans les paquets.

Pour $w \in D(0,1)$, la convergence de la série à droite est absolue donc on peut sommer par paquet.

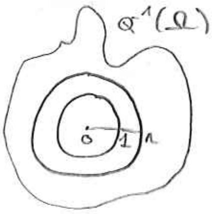
Par unicité du DSE, on peut identifier les coefficients

d'où $\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{n} c_k Q(X)^{p_k} = \sum_{m=0}^{(M+1)p_n} b_m X^m$ dans $\mathbb{C}[X]$.

④ Q est continue donc $Q^{-1}(\Omega)$ est ouvert.

De plus $Q(\overline{D(0,1)}) \subset \Omega$ d'après ② donc $\overline{D(0,1)} \subset Q^{-1}(\Omega)$

Par compacité $d(\overline{D(0,1)}, Q^{-1}(\Omega)) > 0$ et comme F se prolonge holomorphiquement sur $Q^{-1}(\Omega)$, $\exists r > 1$ tq F est développable en série entière sur $D(0,r)$.



$$\forall n \geq 0 \quad \sum_{m=0}^{(M+1)p_n} b_m \left(1+\frac{r}{2}\right)^m = \sum_{k=0}^{n} c_k \left(Q\left(1+\frac{r}{2}\right)\right)^{p_k}$$

à gauche la série converge donc à droite aussi, or $|Q(1+\frac{r}{2})| > 1$

Ceci contredit le fait que $R = 1$ par le lemme d'Abel.