Énoncé: soit $\sum_n a_n$ une série numérique absolument convergente. Pour $I \in P(\mathbb{N})$ on pose: $s_I = \sum_{i \in I} a_i$ avec la convention $s_\emptyset = 0$. Alors l'ensemble $S = \{s_I / I \in P(\mathbb{N})\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Démonstration: Considérons l'application Φ définie sur $P(\mathbb{N})$ par $\Phi(I) = s_I$.
Comme pour tout I de $P(\mathbb{N})$, on a: $|s_I| \leq \sum_{i \in I} |a_i| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| < +\infty$ (car $\sum_n a_n$ converge absolument), alors l'application Φ est bien définie. Il est clair qu'on a: $S = \Phi(P(\mathbb{N}))$. Il suffit alors de montrer que Φ est continue et que $P(\mathbb{N})$ est un compact.

- Montrons que $P(\mathbb{N})$ est un compact.

  Considérons l'application
  $$\begin{aligned} \Psi : \quad & P(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ & A \longrightarrow \mathbb{1}_A \end{aligned}$$
  $\{0,1\}$ muni de sa structure usuelle est un compact, donc $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est aussi un compact (théorème de Tychonoff). C'est un compact pour la distance $d(x,y) = \sum_{n \geq 0} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$. Munissons $P(\mathbb{N})$ de la distance $\delta(I,J) = d(\mathbb{1}_I, \mathbb{1}_J)$.
  On a alors pour tout $I, J \in P(\mathbb{N})$:
  $$\delta(I,J) = d(\mathbb{1}_I, \mathbb{1}_J) = d(\Psi(I), \Psi(J))$$
  Donc Ψ est une isométrie, d'où $P(\mathbb{N})$ est un compact pour la distance δ.

- Montrons que Φ est continue.
  Soit $I_0 \in P(\mathbb{N})$ et soit $\epsilon > 0$. Cherchons $\eta > 0$ tel que pour tout $I \in P(\mathbb{N})$, on a:
  $$\delta(I, I_0) < \eta \Longrightarrow |s_I - s_{I_0}| < \epsilon$$
  Comme $\sum_n |a_n|$ converge, alors, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$: $\sum_{n \geq N_\epsilon} |a_n| < \epsilon$.
  Posons $\eta = \frac{1}{2^{N_\epsilon}}$. Pour $I \in P(\mathbb{N})$. on peut écrire: $s_I = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_I(n) a_n$.
  Soit $I \in P(\mathbb{N})$ tel que $\delta(I, I_0) < \eta$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\mathbb{1}_I(n) - \mathbb{1}_{I_0}(n)|}{2^n} < \frac{1}{2^{N_\epsilon}}$.
  En particulier: $\forall n < N_\epsilon$, $|\mathbb{1}_I(n) - \mathbb{1}_{I_0}(n)| < 2^{n - N_\epsilon} < 1$. Or le terme à gauche appartient à $\{0,1\}$, alors $\forall n < N_\epsilon$; $\mathbb{1}_I(n) = \mathbb{1}_{I_0}(n)$. Ainsi: $s_I - s_{I_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{1}_I(n) - \mathbb{1}_{I_0}(n)) a_n$.
  $$\begin{aligned} \text{Donc :} \qquad |s_I - s_{I_0}| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{1}_I(n) - \mathbb{1}_{I_0}(n)||a_n| \\ &\leq \sum_{n=N_\epsilon}^{+\infty} |\mathbb{1}_I(n) - \mathbb{1}_{I_0}(n)||a_n| \\ &\leq \sum_{n=N_\epsilon}^{+\infty} |a_n| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$
  D'où Φ est continue.

Conclusion: S est un compact.