

Leçon 267. Exemple d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieur

Devs :

- Inégalité isopérimétrique
- Théorème des extrema liés par la géométrie différentielle

Références :

1. Rouvière, Petit guide de calcul différentiel
2. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis
3. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles
4. Coron, Control and nonlinearity
5. Avez, Calcul différentiel
6. Rudin, Analyse réelle et complexe

Plan fait un peu à l'arrache, en rassemblant des parties que j'utilise déjà dans d'autres leçons. C'est clairement une leçon que je ne choisirai de faire qu'en dernier recours à l'oral.

1 Courbes paramétrées en dimension 2

1.1 Définitions et propriétés

On se donne $a < b$ et $c < d$ des réels.

Définition 1. 1. On appelle courbe paramétrée une application $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue. On note alors $\Gamma := \text{Im}(\gamma)$ et on dit que Γ est une courbe.
2. On dit qu'une courbe Γ est **simple** si elle ne s'intersecte pas, c'est-à-dire si

$$\forall (s_1, s_2) \in [a, b]^2 \quad \gamma(s_1) = \gamma(s_2) \implies s_1 = a \text{ et } s_2 = b$$

3. On dit qu'une courbe Γ est **fermée** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Remarque 2. Dans cette partie du plan, on supposera de plus que les courbes paramétrées γ vérifient les propriétés de régularité suivantes

- $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$.

- $\forall s \in [a, b] \quad \gamma'(s) \neq 0$.

Proposition 3. Soit φ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$. Alors la courbe paramétrée η définie par $\eta(t) = \gamma(\varphi(t))$ a la même image que γ : on dit que η est une autre paramétrisation pour la courbe Γ .

Les conditions d'être fermée et d'être simple pour une courbe Γ ne dépendent pas de la paramétrisation choisie.

Définition 4. On dit que deux paramétrisations $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\eta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'une courbe Γ sont équivalentes si

$$\forall t \in [c, d] \quad (\gamma^{-1} \circ \eta)'(t) > 0.$$

Ceci signifie que γ et η ont la même orientation sur la courbe Γ .

On dit que η renverse l'orientation de γ si

$$\forall t \in [c, d] \quad (\gamma^{-1} \circ \eta)'(t) < 0.$$

Définition 5. On appelle longueur d'une courbe Γ paramétrée par $\gamma = (x, y)$ le réel

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &:= \int_a^b |\gamma'(s)| ds \\ &= \int_a^b (x'(s)^2 + y'(s)^2)^{1/2} ds. \end{aligned}$$

Proposition 6. La longueur de la courbe Γ est indépendante de la paramétrisation choisie.

Définition 7. On dit qu'une paramétrisation $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'une courbe Γ est une paramétrisation par longueur d'arc si $|\gamma'(s)| = 1$ pour tout $s \in [a, b]$.

Cela signifie en particulier que la longueur de Γ vaut exactement $b - a$. Aussi, à une translation près, une paramétrisation par longueur d'arc est définie sur $[0, \ell]$.

Théorème 8. Toute courbe fermée simple admet une paramétrisation par longueur d'arc.

1.2 Inégalité isopérimétrique

Dans ce qui suit, on se donne une courbe fermée simple Γ et une paramétrisation $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de Γ par longueur d'arc. On note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ pour $t \in [a, b]$.

Théorème 9. (Jordan, Admis)

La courbe Γ délimite un unique compact connexe K , de sorte que $\partial K = \Gamma$.

Lemme 10. En notant λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 , on a

$$\begin{aligned}\lambda(K) &= \frac{1}{2} \left| \int_{\Gamma} x dy - y dx \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_a^b [x(s) y'(s) - y(s) x'(s)] ds \right|\end{aligned}$$

On dit que $\lambda(K)$ est l'aire de la région enfermée par la courbe Γ .

Développement 1 :

Théorème 11. (Inégalité isopérimétrique)

Soit Γ une courbe fermée simple sur \mathbb{R}^2 de longueur ℓ , et \mathcal{A} l'aire de la région enfermée par Γ . Alors on a

$$\mathcal{A} \leq \frac{\ell^2}{4\pi},$$

avec égalité si et seulement si Γ est un cercle.

2 Courbes en analyse réelle

2.1 Portraits de phase des EDL d'ordre 2

On considère l'équation à coefficients constants $Y' = AY$ avec $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$. L'allure de la trajectoire des solutions dépend alors des valeurs propres λ_1, λ_2 de A .

Tout est dans le Demailly, pages 290 à 294. On peut dessiner les portraits de phases en annexe ou bien directement dans le plan si on cherche à combler un peu.

- Cas 1 : λ_1, λ_2 sont réelles. On distingue $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $\lambda_1 = \lambda_2$ (cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$)
- Cas 2 : λ_1, λ_2 ne sont pas réelles. On obtient des spirales.

2.2 Contrôle des EDL

On se donne un intervalle $]T_0, T_1[$ de \mathbb{R} , et on considère problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_0): \begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $A \in L^\infty(]T_0, T_1[, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in L^\infty(]T_0, T_1[, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ et $u \in L^\infty(]T_0, T_1[, \mathbb{R}^m)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition 12.

On dit que le système $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est contrôlable si pour tout $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, il existe $u \in L^\infty(]T_0, T_1[, \mathbb{R}^m)$ tel que la solution $x \in C^0(]T_0, T_1[, \mathbb{R}^n)$ du problème de Cauchy (\mathcal{P}_0) vérifie $x(T_0) = x_0$ et $x(T_1) = x_1$.

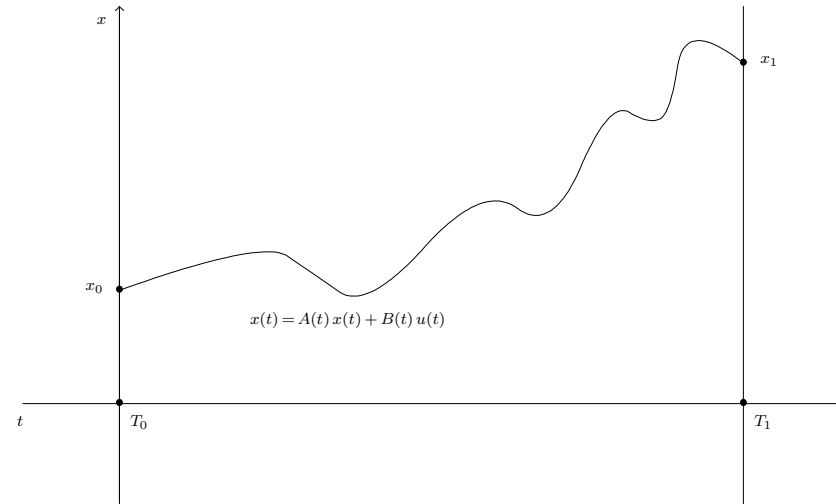


FIG.1 : UNE TRAJECTOIRE CONTRÔLÉE

Définition 13. On définit le Gramian de contrôlabilité du système $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ comme la matrice $\mathfrak{C} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathfrak{C} := \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s) B(s) B(s)^T R(T_1, s)^T ds,$$

où M^T signifie la transposée de M .

Théorème 14. Le système de contrôle $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est contrôlable si et seulement si son Gramian de contrôle \mathfrak{C} est inversible, et dans ce cas, une fonction de contrôle \bar{u} est donnée par

$$\forall \tau \in [T_0, T_1] \quad \bar{u}(\tau) = B(\tau)^T R(T_1, \tau)^T \mathfrak{C}^{-1} (x_1 - R(T_1, T_0) x_0)$$

Proposition 15. Soit $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $u \in L^2(]T_0, T_1[, \mathbb{R}^m)$ tel que la solution du problème de Cauchy $x'(t) = A(t)x + B(t)u$, $x(T_0) = x_0$ vérifie $x(T_1) = x_1$.

Alors le contrôle \bar{u} du théorème 22 vérifie :

$$\int_{T_0}^{T_1} |\bar{u}(t)|^2 dt \leq \int_{T_0}^{T_1} |u(t)|^2 dt,$$

avec égalité si et seulement si $\bar{u}(t) = u(t)$ pour presque tout $t \in [T_0, T_1]$.

Exemple 16. Le système de contrôle $\begin{cases} x_1'(t) = u \\ x_2'(t) = x_1(t) + tu \end{cases}$ où $u \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$ avec

$T > 0$ a pour Gramian de contrôlabilité $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix}$, qui est de rang 1. On en déduit que ce système est contrôlable.

Théorème 17. (Condition de Kalman indépendante du temps)

On suppose que A, B et u ne dépendent pas du temps. Alors le système de contrôle $x'(t) = Ax(t) + Bu$ est contrôlable sur $[T_0, T_1]$ si et seulement si $\text{Vect}(A^i B u : u \in \mathbb{R}^m \text{ et } i \in \{0, \dots, n-1\}) = \mathbb{R}^n$.

2.3 Géométrie différentielle et extrema liés

Définition 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension m en un point $x_0 \in M$ il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(x_0) = 0$ et $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Proposition 19. On suppose qu'il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ différentiables sur un ouvert U contenant x_0 , à valeurs réelles, telles que $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_{n-m}(x_0) = 0$ et que les formes linéaires $(D\varphi_i(x_0))_{0 \leq i \leq n-m}$ sont linéairement indépendantes.

Alors l'ensemble $M = \{x \in U : \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-m}(x) = 0\}$ est une sous-variété en x_0 de dimension m .

Définition 20. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété et $x_0 \in M$. On appelle espace tangent en x_0 à M l'ensemble :

$$T_{x_0}(M) = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists I \in \mathcal{I} \quad \exists \gamma \in D^1(I, M), \quad \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma'(0) = v\}$$

Où l'on a noté \mathcal{I} l'ensemble des intervalles ouverts contenant 0, et $D^1(I, M)$ est l'ensemble des applications différentiables de I vers M , pour $I \in \mathcal{I}$.

On identifie le plus souvent l'espace vectoriel $T_{x_0}(M)$ à l'espace affine passant par x_0 et parallèle à $T_{x_0}(M)$:

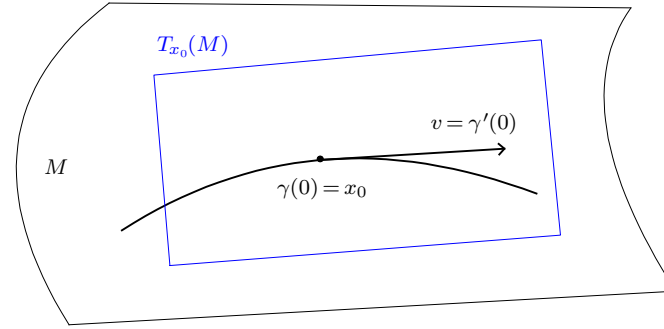


FIG 2. ESPACE TANGENT $T_{x_0}(M)$

Proposition 21. $T_{x_0}(M)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , de même dimension que M .

Théorème 22. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}$ différentiables sur un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant x_0 , que $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_{n-m}(x_0) = 0$ tel que les formes linéaires $(D\varphi_i(x_0))_{0 \leq i \leq n-m}$ sont linéairement indépendantes.

On note $M = \{x \in U : \varphi_1(x) = \dots = \varphi_{n-m}(x) = 0\}$ la sous-variété associée. Alors on a :

$$T_{x_0}(M) = \bigcap_{i=1}^{n-m} \text{Ker}(D\varphi_i(x_0))$$

Lemme 23. Soit v, u_1, \dots, u_k des formes linéaires sur \mathbb{R}^n . Supposons que u_1, \dots, u_k sont linéairement indépendantes, et que $\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(u_i) \subset \text{Ker}(v)$. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$.

Développement 2 :**Théorème 24.** *Théorème des extrema liés*

Soit $f, g_1, \dots, g_k: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ des applications de classe C^1 , et $M = \{x \in U : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$. On suppose que $f|_M$ admet un extremum local en $m \in M$, et que la famille $(Dg_i(m))_{0 \leq i \leq k}$ est libre. Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Df(m) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Dg_i(m)$$

Application 25. *(Inégalité de Hadamard)*

On considère le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel sur \mathbb{R}^n . Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, on a alors l'inégalité :

$$|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

Avec égalité si et seulement si les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une base orthogonale de E .

3 Intégrale sur un chemin, notion d'indice et formule de Cauchy

3.1 Notion d'intégrale sur un chemin

Définition 26. On appelle chemin une courbe paramétrée $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux sur $[a, b]$. Autrement dit, γ est continue sur $[a, b]$ et il existe $s_1, \dots, s_k \in [a, b]$ tels que $a = s_1 < \dots < s_k = b$ et pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, la restriction de γ à l'intervalle $[s_j, s_{j+1}]$ a une dérivée continue sur $[s_j, s_{j+1}]$. Cependant, aux points s_1, \dots, s_n , les dérivées à gauche et à droite de γ peuvent différer.

On note $\langle \gamma \rangle := \text{Im}(\gamma)$.

On appelle lacet un chemin dont l'image est une courbe fermée.

Définition 27. Soit γ un chemin sur $[a, b]$ et f une fonction continue sur $\langle \gamma \rangle$. L'intégrale de f sur γ est définie par

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Proposition 28. La définition de l'intégrale sur un chemin ne dépend pas du paramétrage choisi pour la courbe $\langle \gamma \rangle$.

Proposition 29. On a l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \langle \gamma \rangle} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Exemple 30. Si $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, le chemin défini sur $[0, 2\pi]$ par $\gamma(t) = a + re^{it}$ est le cercle orienté positivement $C(a, r)^+$, de centre a et de rayon r , et on a pour f continue sur $\langle \gamma \rangle$:

$$\int_{C(a, r)^+} f(z) dz = ir \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta.$$

La longueur de $\langle \gamma \rangle$ est $2\pi r$.

Exemple 31. Si $a, b \in \mathbb{C}$, le chemin γ défini sur $[0, 1]$ par $\gamma(t) = a + (b-a)t$ est le segment orienté $[a, b]$. Sa longueur est $|b-a|$ et on a

$$\int_{[a, b]} f(z) dz = (b-a) \int_0^1 f(a + (b-a)t) dt.$$

3.2 Indice et formule de Cauchy

A recopier depuis 204. Connexité

3.3 Application : propriétés des fonctions holomorphes

A recopier depuis 204. Connexité