P. Maurer
ENS Rennes

Leçon 235. Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales

Devs :

- Fonction Gamma
- Théorème de Riesz-Fischer

Références :

1. Gourdon, Analyse
2. Brianes-Pages, Théorie de l'intégration
3. El Amrani, Suites et séries de fonctions
4. Stein & Shakarchi, Fourier Analysis

1 Interversion de limites

On se donne $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

1.1 Interversion de limites. Continuité et dérivabilité d'une suite de fonctions.

Définition 1. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications de E vers F, et f une application de E vers F. On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f sur E si pour tout $x\in E$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $f(x)$.*

Définition 2. *On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f si*

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in E}\|f_n(x)-f(x)\|_F=0.$$

Proposition 3. *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, alors elle converge simplement vers f sur E.*

Exemple 4. La suite de fonctions $f_n\colon \left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & [0,1]\\ x & \mapsto & x^n\end{array}\right.$ converge simplement vers $f\colon \left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & [0,1]\\ x & \mapsto & \mathbf{1}_{\{x=1\}}\end{array}\right.$ mais pas uniformément puisque $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=1$.

Proposition 5. *(Critère de Cauchy uniforme)*

On suppose que F est complet.

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications de E vers F. Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction f si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\geq 0\quad\forall p,q\geq N\quad\sup_{x\in E}\|f_p(x)-f_q(x)\|_F\leq\varepsilon.$$

Théorème 6. *On suppose que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions continues. Alors f est continue.*

Remarque 7. Ce théorème admet deux réciproques partielles avec des hypothèses de monotonie, connues sous le nom de théorèmes de Dini. On les rappelle ici :

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f continue. On suppose de plus que f est continue. Alors la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur I.
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et croissantes qui converge simplement vers f continue. On suppose de plus que f est continue. Alors la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniforme sur I.

Remarque 8. Le théorème 6 est mis en défaut par l'exemple 4 dans le cas où la convergence n'est pas uniforme. En effet, dans cet exemple les fonctions f_n sont toutes $\mathcal{C}^\infty$, pourtant la limite n'est pas continue.

Corollaire 9. *(Théorème d'interversion des limites)*

On suppose que F est complet. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications de E vers F, convergeant uniformément sur E vers une application $f\colon E\to F$. Soit $a\in E$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la limite $b_n:=\lim_{x\to a}f_n(x)$ existe. Alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite b et on a

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a}f_n(x)=\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty}f_n(x).$$

Le résultat du théorème 6 est mis en défaut quand à la dérivabilité, comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple 10. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par $f_n(x)=\left(x^2+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$ converge uniformément vers la fonction $f\colon x\mapsto|x|$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cependant, la valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.

On a cependant les deux théorèmes suivants.

Théorème 11. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de I vers E qui convergent simplement vers une application f. On suppose que la suite des dérivées $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I. Alors f est dérivable sur I et on a*

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n'(x).$$

Théorème 12. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $I=[a,b]$ à valeurs dans un espace de Banach E. On suppose qu'il existe $x_0\in I$ tel que $(f_n(x_0))_{n\geq 0}$ converge, et que la suite des dérivées $(f_n')_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers une application g. Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur I vers une application f de classe $\mathcal{C}^1$, et de plus, on a $f'=g$.*

1.2 Séries entières et dérivation sous le signe somme

Définition 13. *On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où $z\in\mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe.*

Proposition 14. *(Lemme d'Abel)*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0\in\mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors pour tout complexe z tel que $|z|<|z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition 15. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit le rayon de convergence R de la série entière par :*

$$R:=\sup\{r\geq 0:\ (|a_n|\,r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Proposition 16. *D'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z|<R$ et diverge pour tout $|z|>R$.*

Exemple 17. La série $\sum_n n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence $R=1$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R=+\infty$.

Théorème 18. *L'application $z\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $D(0,R)$.*

Corollaire 19. *La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. De plus pour tout $p\in\mathbb{N}$ on a*

$$a_p=\frac{f^{(p)}(0)}{p!} \quad \text{donc} \quad \forall z\in\mathbb{C} \quad f(z)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}z^p.$$

Remarque 20. On a pas de telle propriétés sur le cercle de convergence $C(0,R)$.

Par exemple, $f: z\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}z^n$ n'est pas continue en $z=1$, mais $f: z\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}z^n$ l'est.

Théorème 21. *(Théorème d'Abel angulaire)*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R\geq 1$ telle que la série $\sum a_n$ converge.

On note f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$ et on fixe $\theta_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On pose de plus

$$\Delta_{\theta_0}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}\cap\{1-\rho e^{i\theta}:\ \rho>0 \text{ et } \theta\in[-\theta_0,\theta_0]\}.$$

Alors on a $\lim\limits_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

Théorème 22. *(Théorème taubérien faible)*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R\geq 1$ et f sa somme sur $\mathcal{D}(0,1)$. On suppose qu'il existe $S\in\mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=S$.

Si de plus $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum a_n$ converge et $S=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

2 Interversion limites-intégrales

2.1 Théorèmes de convergence sous l'intégrale

Théorème 23. *(de convergence monotone)*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, qui converge simplement vers $f=\lim_n f_n$. Alors f est mesurable et

$$\int_X f\,d\mu=\lim_n\int_X f_n\,d\mu.$$

Théorème 24. *(Lemme de Fatou)*

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_X \liminf_n f_n\,d\mu\leq\liminf_n\int_X f_n\,d\mu.$$

Exemple 25. Pour $f_n=\mathbf{1}_{[n,+\infty]}$, on a $\liminf_n f_n=0$ et $\int_X f_n\,d\mu=+\infty$, donc l'inégalité ci-dessus n'est pas une égalité en général.

Théorème 26. *(Théorème de convergence dominée)*

On considère un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$ et une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ mesurables à valeurs complexes. On suppose qu'il existe une fonction $f: X\to\mathbb{C}$ telle que :

1. *Pour presque tout $x\in X$, $f_n(x)\to f(x)$.*
2. *Il existe $g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ positive telle que $\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in X,\quad |f_n(x)|\leq g(x)$.*

Alors f est intégrable on a

$$\int_X f_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\to} \int_X f(t)\,dt \quad \text{et même} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_X |f_n - f|\,d\mu = 0.$$

Exemple 27. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f\in L^1(\mu)$.
Alors on a $n\mu(\{|f|\geq n\}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Ce résultat généralise l'inégalité de Marokv.

Développement 1 :

Application 28. *(Riesz-Fischer pour $p<\infty$)*
Pour tout $p\in[1,+\infty[$, $(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

2.2 Intégrales à paramètres

Application 29. (Continuité sous l'intégrale)
On considère Y un espace métrique et $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ une application telle que :

1. Pour tout $y\in Y$, $x\mapsto f(x,y)$ est mesurable.
2. Pour presque tout $x\in X$, $y\mapsto f(x,y)$ est continue.
3. Il existe $g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ positive telle que $\forall y\in Y \quad \forall x\in X \quad |f(x,y)|\leq g(x)$

Alors l'application F définie sur Y par $F(y)=\int_X f(x,y)\,dx$ est continue.

Théorème 30. *(Dérviation sous l'intégrale)*
Soit I,J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\colon\begin{cases} I\times J & \to \mathbb{C}\\ (t,x) & \mapsto f(t,x)\end{cases}$ une fonction vérifiant

- *Pour tout $x\in J$, $t\mapsto f(t,x)$ est intégrable sur I.*
- *Pour presque tout $t\in I$, $x\mapsto f(t,x)$ est dérivable sur J.*
- *Il existe $g\in L^1(I)$ telle que $\left|\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\right|\leq g(t)$ pour tout $x\in J$ et pour presque tout $t\in I$.*

Alors la fonction $F\colon x\mapsto\int_I f(t,x)\,dt$ est dérivable sur I et on a

$$F'(x)=\int_I\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt.$$

Théorème 31. *(Holomorphie sous l'intégrale)*
Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon\begin{cases} I\times\Omega & \to \mathbb{C}\\ (t,z) & \mapsto f(t,z)\end{cases}$ une fonction vérifiant

- *Pour tout $z\in\Omega$, $t\mapsto f(t,z)$ est intégrable sur I.*
- *Pour presque tout $t\in I$, $z\mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur Ω.*
- *Il existe $g\in L^1(I)$ telle que $\left|\frac{\partial}{\partial z}f(z,t)\right|\leq g(t)$ pour tout $z\in\Omega$ et pour presque tout $t\in I$.*

Alors la fonction $F\colon z\mapsto\int_I f(t,z)\,dt$ est holomorphe sur Ω et on a

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{(n)}(z)=\int_I\frac{\partial^n}{\partial z^n}f(z,t)\,dt.$$

Développement 2 :

Application 32. *La fonction Γ définie par $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré $\Omega_0=\{\mathrm{Re}>0\}$.*
Elle se prolonge en une fonction holomorphe sans zéros sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, et $\frac{1}{\Gamma}$ est une fonction entière vérifiant la formule d'Euler

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n^z\cdot n!}.$$

2.3 Cas des intégrales multiples

Théorème 33. *(Fubini-Tonelli)*
Soit X,Y des parties de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ et $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}_+$ une application mesurable positive. Alors les fonctions $y\mapsto\int_X f(x,y)\,dx$ et $x\mapsto\int_Y f(x,y)\,dy$ sont mesurables et on a

$$\int_{X\times Y}f(x,y)\,dx\,dy=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Théorème 34. *(Fubini-Lebesgue)*
Soit X,Y des parties de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ et $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$ mesurable. On suppose que :

$$\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|\,dy\right)dx<+\infty \quad \text{ou que} \quad \int_Y\left(\int_X|f(x,y)|\,dx\right)dy<+\infty$$

Alors les fonctions $y\mapsto\int_X f(x,y)\,dx$ et $x\mapsto\int_Y f(x,y)\,dy$ sont intégrables et on a :

$$\int_{X\times Y}f(x,y)\,dx\,dy=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Remarque 35. On retrouve certains théorèmes sur les séries en les considérant comme des intégrales par rapport à la mesure de comptage.

3 Application à l'analyse de Fourier

On se place sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et on note simplement λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{T}$.

Définition 36. *Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le $n^{\text{ème}}$ coefficient de* FOURIER *de f par*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\, e^{-\mathrm{i}nt}\, dt.$$

On appelle série de FOURIER *associée (formellement) à f la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{int}$, et on note $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à cette dernière.*

Théorème 37. *(Lemme de Riemann Lebesgue)*
Pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, on a $\hat{f}(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 38. *L'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}\, dx$ est un espace de* HILBERT*, et la famille $(t \mapsto e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.*

Corollaire 39. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors*

1. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2\, dt$,
2. $f = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{int}$, *la convergence étant au sens de la norme de $L^2(\mathbb{T})$,*
3. *l'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie linéaire bijective,*
4. *pour tout $g \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\, dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$.*

La convergence de la série de Fourier de f vers f dans les cas où $f \in L^1(\mathbb{T})$ ou même $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ n'est pas aussi simple que dans le cas L^2. On a par exemple le cas pathologique suivant.

Exemple 40. La fonction $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ définie par

$$f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[(2^{p^3} + 1) \cdot \frac{x}{2}\right]$$

est continue sur $\mathbb{T}$, mais sa série de FOURIER diverge en zéro.

Définition 41. *On dit qu'une suite de fonctions $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{T}$ est un « bon noyau » lorsqu'elle vérifie :*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(x)\, dx = 1$,
2. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)|\, dx < \infty$,
3. $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)|\, dx = 0$.

Théorème 42. *Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un bon noyau et $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Pour tout point de continuité x de f, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Si de plus f est continue partout sur $\mathbb{T}$, alors la limite est uniforme.

Définition 43. *On appelle noyau de Dirichlet et noyau de Féjer les suites de fonctions respectives $(D_N)_{N \geq 1}$ et $(F_N)_{N \geq 1}$ définies sur $\mathbb{T}$ par :*

$$\forall N \geq 1 \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \quad \text{et} \quad F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Théorème 44. *(Théorème de Féjer)*
Pour tout $x \in \mathbb{T}$ non nul, on a $F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$, et le noyau de Féjer est un bon noyau.

Cela signifie en particulier, que pour une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{T})$, la somme partielle de ses coefficients de Fourier $S_N(f)$ définie sur $\mathbb{T}$ par $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{int} = (f * D_N)(t)$ converge au sens de Césaro, uniformément vers f.

Théorème 45. (Critère de DINI).
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ vérifiant une condition de LIPSCHITZ *au point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, c'est-à-dire telle que*

$$\forall \theta \in \mathbb{T} \quad |f(\theta) - f(\theta_0)| \leq |\theta - \theta_0|.$$

Alors la série de FOURIER *de f converge ponctuellement vers f en θ_0 : on a $S_N(f)(\theta_0) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} f(\theta_0)$.*

Théorème 46. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Alors la série de fonctions $\sum \hat{f}(n)\, e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{T}$ et sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{T}$ qui est égale à f presque partout, i.e pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, on a $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$.*

Si de plus f est continue, l'égalité a lieu partout.