réf. Gourdon p. 166

Développement : Trigonalisation simultanée d'une famille d'endomorphismes finie :

leçon 154
157
159

Théorème :

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dim finie, $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{L}(E)$ une famille d'endo trigonalisables. On suppose que les u_i commutent entre eux deux à deux. Alors $\exists$ une base de E dans laquelle les matrices des u_i sont toutes triangulaires supérieures (i.e. les u_i sont co-trigonalisables).

Preuve :

On va faire une double récurrence sur m et sur $n = \dim E$: En posant $P_{m,n}$ le résultat pour toute famille de m endomorphismes sur un espace de dimension n, on montre : $\forall m \in \mathbb{N}^* \left(\forall n \in \mathbb{N}, P_{m,n}\right) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, P_{m+1,n}\right)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{1,n}$.

* rang $m=1$

Les $\{u_i\}_i$ étant trigonalisables, le cas initial est vrai, $\forall n \in \mathbb{N}$.

* pour $m \geq 2$ fixé, on montre $\forall n \in \mathbb{N}, P_{m,n}$ par récurrence sur n.

* cas $n=1$

Encore une fois le cas initial est évident, toute matrice 1×1 est trigonale.

* Supposons $n > 1$.

Soit $i \in [\![1, m]\!]$. u_i est trigonalisable donc P_i le polynôme caractéristique de u_i sur $\mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Par Cayley Hamilton, il est aussi annulateur. Considérons l'endomorphisme ${}^t u_i \in \mathcal{L}(E^*)$: $P_i({}^t u_i) = {}^t(P_i(u_i)) = 0$ donc P_i est aussi annulateur de ${}^t u_i$, qui est donc trigonalisable de même que u_i (sinon : ${}^t u_i$ et u_i ont le m̂ pol car, donc P_i est scindé). En tant qu'endomorphisme trigonalisable, ${}^t u_i$ admet une valeur propre λ_i, d'espace propre $F_i \subset E^*$ non trivial.

Sinon : $\exists$ un pol annulateur scindé $\Rightarrow$ pol min scindé $\Rightarrow$ pol car scindé

On remarque ensuite que les endomorphismes ${}^t u_i$ commutent deux à deux entre eux : En effet, on a $\forall i, j \in [\![1, m]\!]^2$:

$$ {}^t u_i \circ {}^t u_j = {}^t(u_j \circ u_i) = {}^t(u_i \circ u_j) = {}^t u_j \circ {}^t u_i $$

F_1 stable par ${}^tu_i$

Soit $\varphi \in F_1 = \ker({}^tu_1 - \lambda\, Id_{E^*})$, on a $\forall i \in [\![1, m]\!]$

$${}^tu_1({}^tu_i(\varphi)) = {}^tu_i({}^tu_1(\varphi)) = {}^tu_i(\lambda_1 \varphi) = \lambda_1 . {}^tu_i(\varphi)$$

donc ${}^tu_i(\varphi) \in F_1$, qui est donc stable par ${}^tu_i$. On peut alors poser $v_i := {}^tu_{i|F_1} \in \mathcal{L}(F_1)$. Les polynômes P_i étant annulateurs des v_i, ceux-ci sont trigonalisables sur F_1 et ils commutent deux à deux entre eux.

→ Si $F_1 = E^*$, alors ${}^tu_1$ est une homothétie, de matrice diagonale dans toute base, de même que u_1. Le problème est donc ramené à l'étude des endomorphismes $u_2, \dots, u_m$ et le résultat est donné par $P_{m-1,n}$. ▪

→ Si F_1 de dim $r < n$, alors par $P_{m,r}$ $\exists \{g_1, \dots, g_r\}$ base de F_1 dans laquelle les matrices de $v_1, \dots, v_m$ sont triangulaires supérieures.

Alors, on peut trigonaliser $v_1, \dots, v_m$ dans une même base de F_1 donc $v_1, \dots, v_m$ partagent un vecteur propre : le premier vecteur de la base $g_1 \in E^*$. Comme Vect(g_1) est stable par tout les ${}^tu_i$, son orthogonal $H = \ker g_1$ est stable par tous les u_i.

On peut donc considérer $w_i := (u_i)_{|H}$ et appliquer $P_{m,n-1}$ aux w_i : $\exists$ une base $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ de H dans laquelle les matrices des w_i sont toutes triangulaires supérieures, on obtient alors le résultat en prenant pour e_n un vecteur quelconque de $H^\perp$. ▪

* détail :

si f, g trigonalisables et commutent :

Alors f possède une valeur propre λ, et donc un sous espace propre E_λ.

E_λ stable par g et $g_{|E_\lambda}$ trigonalisable ($P_{g|E_\lambda} \mid P_g$) donc admet un vecteur propre $x \in E_\lambda$. Ce x est un $\vec{vp}$ de f et de g.