VM
11/04/15
1

Théorème de point fixe pour les sous-groupes compacts de GL(E).

203, 206, 208

ℝ - espace vectoriel normé de dimension finie ? Alexandri ?

Théorème : Soit E un espace vectoriel normé. Soit G un sous-groupe compact de $GL_c(E)$.
Soit K un compact convexe non vide tel que $\forall u \in G$, $u(K) \subseteq K$. Alors il existe $x \in K$ tel que $u(x) = x$ $\forall u \in G$.

Corollaire : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

dém (thm) : Démontrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $u(K) \subseteq K$.
Alors il existe $x \in K$ tel que $u(x) = x$.

prendre n par indice

dém : K non vide : soit $x_0 \in K$.

$$x_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} u^i(x_0) . \qquad x_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} u^i(x_0) .$$

$\forall i$, $u^i(x_0) \in K$. Or K est convexe, donc $\forall k$, $x_{k+1} \in K$.
Comme K est compact, il existe $x \in K$ et φ une extraction tels que $x_{\varphi(k)} \to x$.

$$\| u(x_{\varphi(k)}) - x_{\varphi(k)} \| = \left\| \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{i=0}^{\varphi(k)-1} \left(u^{i+1}(x_0) - u^i(x_0) \right) \right\|$$

par continuité de u : $\| u(x_{\varphi(k)}) - x_{\varphi(k)} \| \to \| u(x) - x \|$

$$\leq \frac{1}{\varphi(k)} \| u^{\varphi(k)}(x_0) - x_0 \|$$

$$\leq \frac{\operatorname{diam} K}{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

donc $u(x) = x$, d'où le lemme. □

On pose ensuite $N(x) = \max_{u \in G} \| u(x) \|$ sur E. N est une norme sur E. En effet, N est bien définie car G est compact.

· N est positive.

· Soit $x \in E$ tel que $N(x) = 0$. Alors $\forall u \in G$, $u(x) = 0$.

En particulier, pour $u = id_G$, $x = 0$.

· $N(\lambda x) = \max_{u \in G} \|u(\lambda x)\| = \max_{u \in G} |\lambda| \, \|u(x)\| = |\lambda| \, N(x)$.

· $\|u(x+y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\| \leq N(x) + N(y)$

donc en passant à la borne supérieure, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Cas d'égalité : $\exists u \in G$ tel que $N(x+y) = \|u(x+y)\|$.

alors $\|u(x+y)\| = \|u(x)\| + \|u(y)\|$

donc $u(x)$ et $u(y)$ sont positivement liés, et comme u est inversible, il en va de même pour x et y.

Soit maintenant $F_u = \{x \in K \mid u(x) = x\}$.

On veut montrer que $\bigcap_{u \in G} F_u \neq \emptyset$.

Comme F_u est fermé dans K (et K compact) (~~donc compact~~), il suffit de montrer que toute intersection finie de F_u est non vide.

Soit $u_1, \dots, u_p \in G$. Soit $u = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} u_i$.

$\forall i$, $u_i(K) \subseteq K$. Comme K est convexe, $u(K) \subseteq K$.

D'après le lemme, il existe $x \in K$ tel que $u(x) = x$.

Alors $N(x) = N(u(x)) \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \underbrace{N(u_i(x))}_{= N(x)} = N(x)$

donc on a égalité dans l'inégalité triangulaire,

$\exists y \in E$, $\forall i$, $\exists \lambda_i > 0$, $u_i(x) = \lambda_i y$.

Or $u_i(x)$ ont tous même norme

→ si la norme est nulle : $\forall i$, $u_i(x) = 0$.

→ sinon, tous les λ_i sont égaux et tous les $u_i(x)$ sont égaux.

$x = u(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} u_i(x) = u_i(x)$ $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, donc $x \in F_{u_i}$ $\forall i$,

$\bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i}$ est non vide.

VM
11/04/15
2

<u>dém (corollaire)</u> :

Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.

G agit sur $S_n(\mathbb{R})$ par

$$\rho : G \to GL(S_n(\mathbb{R}))$$
$$M \mapsto (S \mapsto M S {}^tM).$$

ρ est continue, par composition de

$$\begin{array}{ccccc} G & \to & G\times G & \to & L(S_n(\mathbb{R})) \\ M & \mapsto & M\times M & & \\ & & (A,B) & \mapsto & S\mapsto AS{}^tB \end{array}$$

Ainsi $\mathcal{G} = \rho(G)$ est un sous-groupe compact de $GL(S_n(\mathbb{R}))$.

Soit $L = \{A{}^tA,\ A\in G\}$. $L \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Comme $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe, et que l'enveloppe convexe d'un compact est compacte (csq de Carathéodory), $K = \mathrm{Conv}\, L$ est un compact convexe non vide inclus dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus, $\forall A, M \in G$,

$$\rho(M).(A{}^tA) = MA{}^tA{}^tM = (MA){}^t(MA) \in L$$

Or $\rho(M)$ est linéaire, donc $\rho(M)(K) \subseteq K$.

Ainsi, d'après le théorème de point fixe, il existe $S\in K$ tel que $\forall M\in G,\ \rho(M).(S) = S$

donc $\forall M \in G,\ MS{}^tM = S$

Or $S\in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $G \subset O(q_S)$.